SCPY158 Physics II : Part II - Modern Physics

วทฟส๑๕๘ ฟิสิกส์ ๒ : ส่วนที่ ๒ – ฟิสิกส์ยุคใหม่

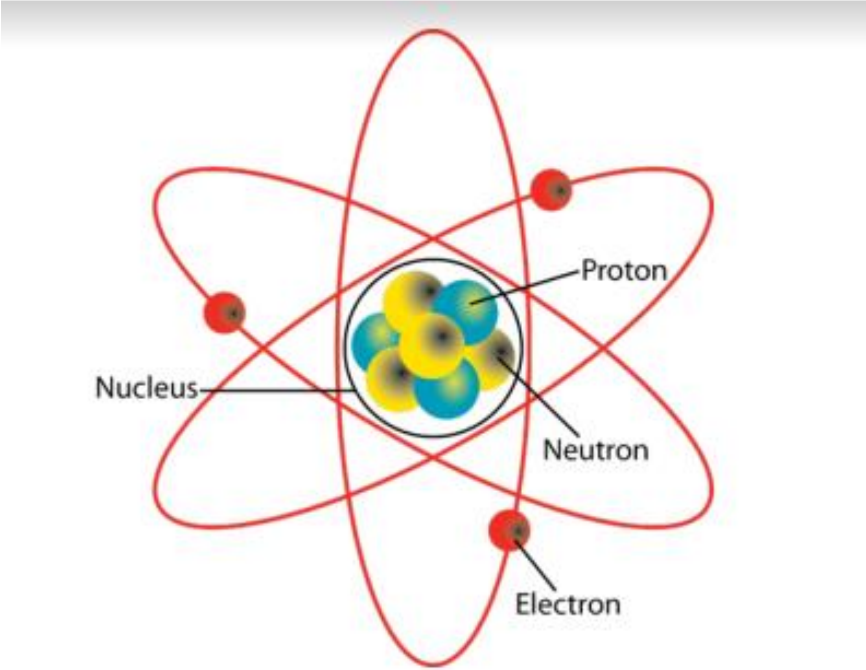
Course Description (คำอธิบายรายวิชา)

ทฤษฎีสัมพัทธภาพ (Theory of Relativity) กลศาสตร์ควอนตัม (Quantum Mechanics) ฟิสิกส์อะตอม (Atomic Physics) ฟิสิกส์นิวเคลียร์ (Nuclear Physics)

↓

ฟิสิกส์อะตอม (Atomic Physics)

“โครงสร้าง” ของ “atom” ในปัจจุบัน (ในระดับ Atomic Physics & Nuclear Physics)



http://teachtogether.chedk12.com/uploads/images/redactor/ae15d8287f565c29cf835bd81d92c385.PNG

พื้นที่ส่วนใหญ่ใน atom
จะเป็น "ที่ว่าง"

มวลมาก
ประจุ "$+Ze$"

$Z \equiv$ "Atomic" Number
จำนวน Z ตัว
$m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
ประจุ "$-e$"

atom = nucleus + electrons

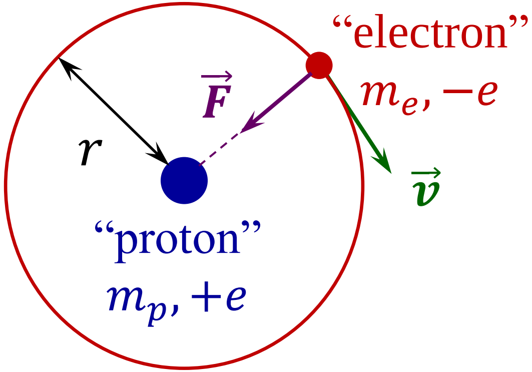
nucleus → protons, neutrons

protons
ประจุ "$+e$"
$m_p = 1.672 \times 10^{-27}$ kg
จำนวน Z ตัว

neutrons
ประจุ "0" (เป็นกลาง)
$m_n = 1.674 \times 10^{-27}$ kg
จำนวน N ตัว
$N = A - Z$
$A \equiv$ "Mass" Number

"neutron" เป็น "electrically neutral twin" ของ "proton" (มีมวลใกล้เคียงกันมาก)
เรียก "neutron" และ "proton" รวมกันว่า "nucleon"

"Bohr's Theory"



→ สามารถอธิบาย "โครงสร้างหลัก" ของ "สเปกตรัม" ของ "คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า" ที่ "อะตอมที่มีอิเล็กตรอนตัวเดียว (one-electron หรือ hydrogenic atoms)" แผ่ออกมาได้

→ อธิบาย "รายละเอียด" ไม่ได้

→ อธิบาย "อะตอมที่มีอิเล็กตรอนหลายตัว (multi-electron atoms)" ไม่ได้

→ ต้องการทฤษฎีที่ดีกว่า/ทั่วไปกว่า → "กลศาสตร์ควอนตัม"

“หัวข้อที่จะศึกษา” ใน “ฟิสิกส์อะตอม”

(1) อะตอมไฮโดรเจน (hydrogen atom)

(1.1) สมการชโรดิงเจอร์สำหรับอะตอมไฮโดรเจน (Schrodinger equation for hydrogen atom)

(1.2) การแก้สมการชโรดิงเจอร์สำหรับสำหรับอะตอมไฮโดรเจน

(1.3) เลขควอนตัม (Quantum Numbers)

(1.4) “การซ้อนทับ” ของ “ระดับพลังงาน/ฟังก์ชันคลื่น” (Degeneracy)

(1.5) “แผนภาพระดับพลังงาน (Energy-level Diagram)” ของ (“อิเล็กตรอน” ใน) “อะตอมไฮโดรเจน”

$$n = 3 \text{ ———— } \rightarrow \quad 3s \text{ ———— } 3p \text{ ———— } 3d \text{ ————}$$

$$n = 2 \text{ ———— } \rightarrow \quad 2s \text{ ———— } 2p \text{ ————}$$

$$n = 1 \text{ ———— } \rightarrow \quad 1s \text{ ————}$$

(1.6) “ฟังก์ชันคลื่น” ของ “อิเล็กตรอน” ใน “อะตอมไฮโดรเจน”

“หัวข้อที่จะศึกษา” ใน “ฟิสิกส์อะตอม” [ต่อ]

(2) โมเมนตัมเชิงมุม (Angular Momentum)

(2.1) “orbital” angular momentum ($\vec{L}$)

(2.2) “spin” หรือ “intrinsic spin” angular momentum ($\vec{S}$)

(2.3) “total” angular momentum ($\vec{J}$)

(2.4) “Spectroscopic Notation” สำหรับการระบุ “สถานะ (state)” ของ “electron” ใน “อะตอม”

(3) อะตอมที่มีอิเล็กตรอนหลายตัว (multi-electron atoms)

(3.1) “หลักการกีดกัน” ของ “เพาลี” (Pauli’s “Exclusion” Principle)

(3.2) “ระดับพลังงาน” ของ “อิเล็กตรอน” ใน “อะตอมที่มีอิเล็กตรอนหลายตัว”

(3.3) “การจัดเรียงของอิเล็กตรอน” ใน “สถานะพื้น” ของ “อะตอมที่มีอิเล็กตรอนหลายตัว” (Ground-state Electron Configuration)

“หัวข้อที่จะศึกษา” ใน “ฟิสิกส์อะตอม” [ต่อ]

(4) “สเปกตรัม” ของ (“คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า” ที่) “อะตอม” (แผ่ออกมา) (Atomic Spectra)

(5) ปรากฏการณ์ซีแมน (Zeeman Effect)

(6) รังสีเอ็กซ์ (X-ray)

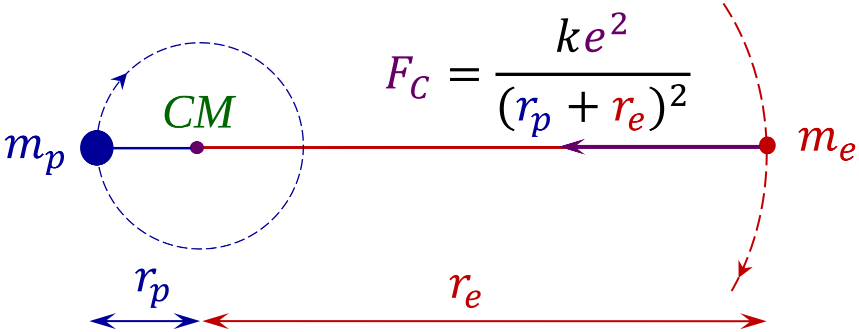
(7) เลเซอร์ (LASER – Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation)

(1) อะตอมไฮโดรเจน (hydrogen atom)

(1.1) สมการชโรดิงเจอร์สำหรับอะตอมไฮโดรเจน

ถึงแม้ proton จะมีมวลมากกว่า electron มากๆ แต่ก็ ไม่ได้มีมวลเป็นอนันต์ (infinity)

→ ทั้ง electron และ proton จะเคลื่อนที่รอบ “จุดศูนย์กลางมวล (CM) ของระบบ”



จาก $m_p r_p = m_e r_e$ (นิยามของจุดศูนย์กลางมวล) และ $r = r_p + r_e$ จะได้

$$r_e = \left(\frac{m_p}{m_p + m_e}\right) r \qquad \text{และ} \qquad r_p = \left(\frac{m_e}{m_p + m_e}\right) r$$

"การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ (relative motion)" ของ "electron" เทียบกับ "proton"

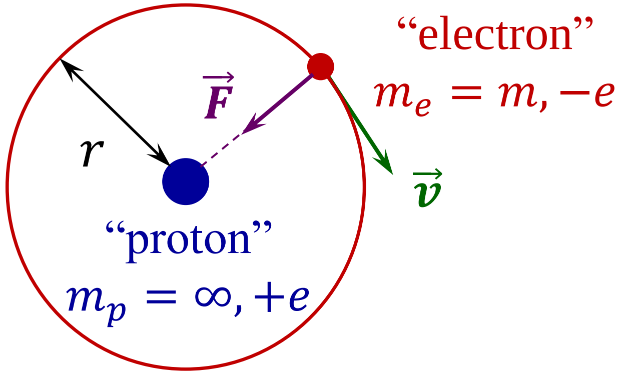
จะ "เหมือน (equivalent)" กับ

"การเคลื่อนที่" ของ "อนุภาค" ที่มีมวลเท่ากับ "มวลลดทอน (reduced mass)" ของ "ระบบ"

$$m = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e}$$

รอบ "ตำแหน่ง" ของ "proton" ภายใต้ "แรง (ทางไฟฟ้า) อันเดิม"

(เสมือนกับว่า electron มีมวลเป็น "m" เคลื่อนที่รอบ proton ที่มีมวลเป็นอนันต์/อยู่กับที่)



“พลังงานศักย์ (ไฟฟ้า)” ของ “ระบบ” คือ $V(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\frac{ke^2}{r} = -\frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)r} = V(r)$

“พลังงานจลน์” ของ “ระบบ” คือ $K = \frac{\vec{\boldsymbol{p}}^2}{2m}$

“พลังงานรวม (Total Energy, E)” หรือ “Hamiltonian, H” ของ “ระบบ” คือ

$$H = K + V = \frac{\vec{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + V(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\vec{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + -\frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)r}$$

เนื่องจาก พลังงานศักย์ไม่ขึ้นกับเวลาอย่างชัดเจน →

พิจารณาเฉพาะ “สมการชโรดิงเจอร์แบบ ‘ไม่ขึ้น’ กับเวลา”

เปลี่ยนเป็น “operator”: $\vec{\boldsymbol{p}} \to \vec{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{op}} = -i\hbar\vec{\nabla}$, $\vec{\boldsymbol{r}} \to \vec{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{op}} = \vec{\boldsymbol{r}}$

$H \to H_{\mathrm{op}} = E =$ พลังงานที่เป็นไปได้ของระบบ $\left(\text{กรณีทั่วไป } H \to H_{\mathrm{op}} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)$

นำไป "operate" บน "ฟังก์ชันคลื่นส่วนที่ขึ้นกับตำแหน่ง (spatial part): $\psi(\vec{\boldsymbol{r}})$"

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi(\vec{\boldsymbol{r}}) - \frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)r}\psi(\vec{\boldsymbol{r}}) = E\,\psi(\vec{\boldsymbol{r}})$$

"สมการคลื่นของชโรดิงเจอร์แบบ 'ไม่ขึ้น' กับเวลา" สำหรับ "อะตอมไฮโดรเจน"
(Time-Independent Schrödinger Wave Equation for Hydrogen Atom)

เพื่อ "ความสะดวก" จะเขียนสมการในเทอมของ "พลังงานศักย์" $V(r) = -\frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)r}$

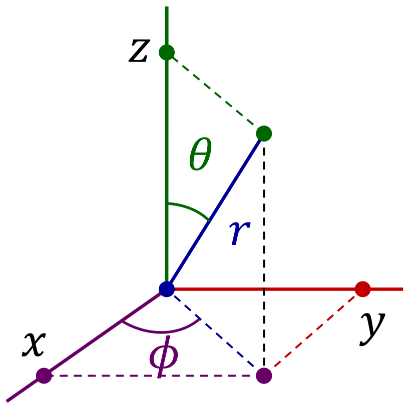
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi(\vec{\boldsymbol{r}}) + V(r)\psi(\vec{\boldsymbol{r}}) = E\,\psi(\vec{\boldsymbol{r}})$$

"จัดรูปสมการ" จะได้

$$\vec{\nabla}^2\psi(\vec{\boldsymbol{r}}) + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(r)]\psi(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0$$

(1.2) การแก้สมการชโรดิงเจอร์สำหรับสำหรับอะตอมไฮโดรเจน

เนื่องจาก "พลังงานศักย์" ขึ้นกับ "radial distance (r)" เท่านั้น → มีลักษณะ "สมมาตรทรงกลม (spherical symmetry)" → ควรเลือกใช้ "spherical coordinates (r, θ, ϕ)" ในการระบุ "ตำแหน่ง" ของ "electron" เทียบกับ "proton"



$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r} \rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$\tan\phi = \frac{y}{x} \rightarrow \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

ใน "spherical coordinates (r, θ, ϕ)" จะได้

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$$

ดังนั้น $$\vec{\nabla}^2\psi(\vec{\boldsymbol{r}}) + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(r)]\psi(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0$$ จะมีรูปเป็น

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right] + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(r)]\psi = 0$$

คูณตลอดด้วย "r^2" $\rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right] + \frac{2mr^2}{\hbar^2}[E - V(r)]\psi = 0$$

จัดเทอมใหม่ $\rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2}[E - V(r)]\psi = -\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{2mr^2}{\hbar^2}[E-V(r)]\psi=-\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]$$

ใช้ "วิธีการแยกตัวแปร (Separation of Variables)" :

(i) เขียน $\psi(\vec{\boldsymbol{r}})=\psi(r,\theta,\phi)=R(r)\,Y(\theta,\phi)$

(ii) แทนลงในสมการ

และ (iii) หารตลอดด้วย $\psi(\vec{\boldsymbol{r}})=R(r)\,Y(\theta,\phi)$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2mr^2}{\hbar^2}[E-V(r)]=-\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right]$$

$$\downarrow$$

LHS (ขึ้นกับ r เท่านั้น) $=$ RHS (ขึ้นกับ θ และ ϕ) $=$ ค่าคงตัว $=\ \ell(\ell+1)$

“สมการ” สำหรับ “radial part, $R(r)$” คือ

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2mr^2}{\hbar^2}[E-V(r)] = \ell(\ell+1)$$

ใน “กระบวนการแก้สมการ” เพื่อหา “$R(r)$” และ “E” จะได้ว่า

→ “$R(r)$” นอกจากจะขึ้นกับ “ℓ” แล้ว ยังขึ้นกับ “n” ซึ่งเป็น “จำนวนเต็มบวก” ด้วย

$$R(r) \rightarrow R_{n\ell}(r)$$

โดยที่ $n = 1, 2, 3, \ldots$ และ $\ell = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ (n ค่า)

→ “พลังงานที่เป็นไปได้ของระบบ (E)” จะขึ้นกับ “n” เท่านั้น (ไม่ขึ้นกับ “ℓ”)

$$E \rightarrow E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0 h^2 n^2} = -\frac{13.6}{n^2}\ \text{eV}$$

ซึ่ง “ตรงกับ” ที่ได้จาก “Bohr’s Theory”

“สมการ” สำหรับ “angular part, $Y(\theta,\phi)$” คือ

$$\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right]=-\ell(\ell+1)$$

ใช้ “วิธีการแยกตัวแปร (Separation of Variables)” :

(i) เขียน $Y(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\,\Phi(\phi)$, (ii) แทนลงในสมการ,

(iii) หารตลอดด้วย $Y(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\,\Phi(\phi)$ และ (iv) จัดเทอม จะได้

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\ \ell(\ell+1)\sin^2\theta=\text{ค่าคงตัว}=-m_\ell^2$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m_\ell^2\Phi \;\rightarrow\; \boxed{\Phi(\phi) = \Phi_{m_\ell}(\phi) = Ae^{im_\ell\phi} + Be^{-im_\ell\phi}}$$

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \{\ell(\ell+1)\sin^2\theta\}\,\Theta = m_\ell^2\Theta \;\rightarrow\; \boxed{\Theta(\theta) = \Theta_{\ell m_\ell}(\theta)}$$

$\Theta_{\ell m_\ell}(\theta) =$ "Associated Legendre Polynomial"

$Y(\theta,\phi) \rightarrow \boxed{Y_{\ell m_\ell}(\theta,\phi) = \Theta_{\ell m_\ell}(\theta)\,\Phi_{m_\ell}(\phi)}$ = "Spherical Harmonics"

$m_\ell = -\ell, -\ell+1, \ldots, 0, \ldots, \ell-1, \ell$ → "$(2\ell+1)$ ค่า"

$\downarrow$

"ฟังก์ชันคลื่นของระบบ" จะขึ้นกับทั้ง "n", "ℓ" และ "m_ℓ"

$$\psi(\vec{\boldsymbol{r}}) \rightarrow \psi_{n\ell m_\ell}(r,\theta,\phi) = R_{n\ell}(r)\,Y_{\ell m_\ell}(\theta,\phi) = R_{n\ell}(r)\,\Theta_{\ell m_\ell}(\theta)\Phi_{m_\ell}(\phi)$$

(1.3) เลขควอนตัม (Quantum Numbers)

→ เรียก "n" ว่า "เลขควอนตัมหลัก ('Principal' Quantum Number)"

→ เรียก "ℓ" ว่า "Orbital Angular Momentum" Quantum Number

(เลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุมแบบวงโคจร)

เนื่องจาก เกี่ยวข้องกับ "ขนาด" ของ "โมเมนตัมเชิงมุมแบบวงโคจร"

$$L = |\vec{\boldsymbol{L}}| = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar \quad \text{หรือ} \quad L^2 = |\vec{\boldsymbol{L}}|^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2$$

→ เรียก "m_ℓ" ว่า "Orbital Magnetic" Quantum Number

(เลขควอนตัมแม่เหล็กแบบวงโคจร)

เนื่องจาก เกี่ยวข้องกับ "z–component" ของ "โมเมนตัมเชิงมุมแบบวงโคจร"

$$L_z = z - \text{component ของ } \vec{\boldsymbol{L}} = m_\ell \hbar$$

(1.4) "การซ้อนทับ" ของ "ระดับพลังงาน/ฟังก์ชันคลื่น" (Degeneracy)

เนื่องจาก (i) "พลังงานที่เป็นไปได้ของระบบ" ขึ้นกับ "n" เท่านั้น (ไม่ขึ้นกับ "ℓ" และ "m_ℓ")

ในขณะที่ "ฟังก์ชันคลื่นของระบบ" จะขึ้นกับทั้ง "n", "ℓ" และ "m_ℓ"

และ (ii) แต่ละค่าของ "n" จะมี "ℓ" ได้ "n" ค่า [เพิ่ม "ทีละหนึ่ง" จาก "0" ถึง "$n-1$"]

และ แต่ละค่าของ "ℓ" จะมี "m_ℓ" ได้ "$2\ell+1$" ค่า [เพิ่ม "ทีละหนึ่ง" จาก "$-\ell$" ถึง "$+\ell$"]

ดังนั้น จะได้ว่า

สำหรับแต่ละค่าของ "n"

จะมี "n^2 states/wave functions" ที่มี "พลังงานเท่ากัน"

[สำหรับแต่ละค่าของ "n" จะมีชุดของตัวเลข $\{n, \ell, m_\ell\}$ ที่ต่างกัน n^2 ชุด]

→ มี "การซ้อนทับ" ของ "ระดับพลังงาน/ฟังก์ชันคลื่น" → มี "Degeneracy"

$$n = 1 \rightarrow \ell = 0 \rightarrow m_\ell = 0 \rightarrow 1\ \text{state} \rightarrow \ \text{มี “1 state” ที่มีพลังงาน}\ E_1$$

$$n = 2 \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \ell = 0 \rightarrow m_\ell = 0 \rightarrow 1\ \text{state} \\ \ell = 1 \rightarrow m_\ell = -1, 0, +1 \rightarrow 3\ \text{states} \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{matrix} \text{มี “4 states”} \\ \text{ที่มีพลังงาน}\ E_2 \end{matrix}$$

$$n = 3 \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \ell = 0 \rightarrow m_\ell = 0 \rightarrow 1\ \text{state} \\ \ell = 1 \rightarrow m_\ell = -1, 0, +1 \rightarrow 3\ \text{states} \\ \ell = 2 \rightarrow m_\ell = -2, -1, 0, +1, +2 \rightarrow 5\ \text{states} \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{matrix} \text{มี “9 states”} \\ \text{ที่มีพลังงาน}\ E_3 \end{matrix}$$

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell + 1) = 2\sum_{\ell=0}^{n-1} \ell + \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 = n(n-1) + n = n^2$$

$$\left[\left. \begin{matrix} \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} \ell = 0 + 1 + \cdots + (n-2) + (n-1)\ \ [n\ \text{terms}] \\ \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} \ell = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + 0\ \ [n\ \text{terms}] \end{matrix} \right\} \rightarrow 2\sum_{\ell=0}^{n-1} \ell = n(n-1) \right]$$

(1.5) “แผนภาพระดับพลังงาน (Energy-level Diagram)” ของ (“อิเล็กตรอน” ใน) “อะตอมไฮโดรเจน”

เดิม ระบุ “ระดับพลังงาน” โดย ใช้ “เลขควอนตัมหลัก (n)” เพียงตัวเดียว ปรับเป็น ระบุโดย

ใช้ “เลขควอนตัมหลัก (n)” และ “เลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุมแบบวงโคจร (ℓ)”

{ถึงแม้ว่า (ในระดับนี้) “ระดับพลังงาน” จะขึ้นกับ “n” ตัวเดียว → “E_n”}

↓

ระบุค่า “n” เป็น “ตัวเลข” : $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$ และ ระบุค่า “ℓ” ด้วย “ตัวอักษร”

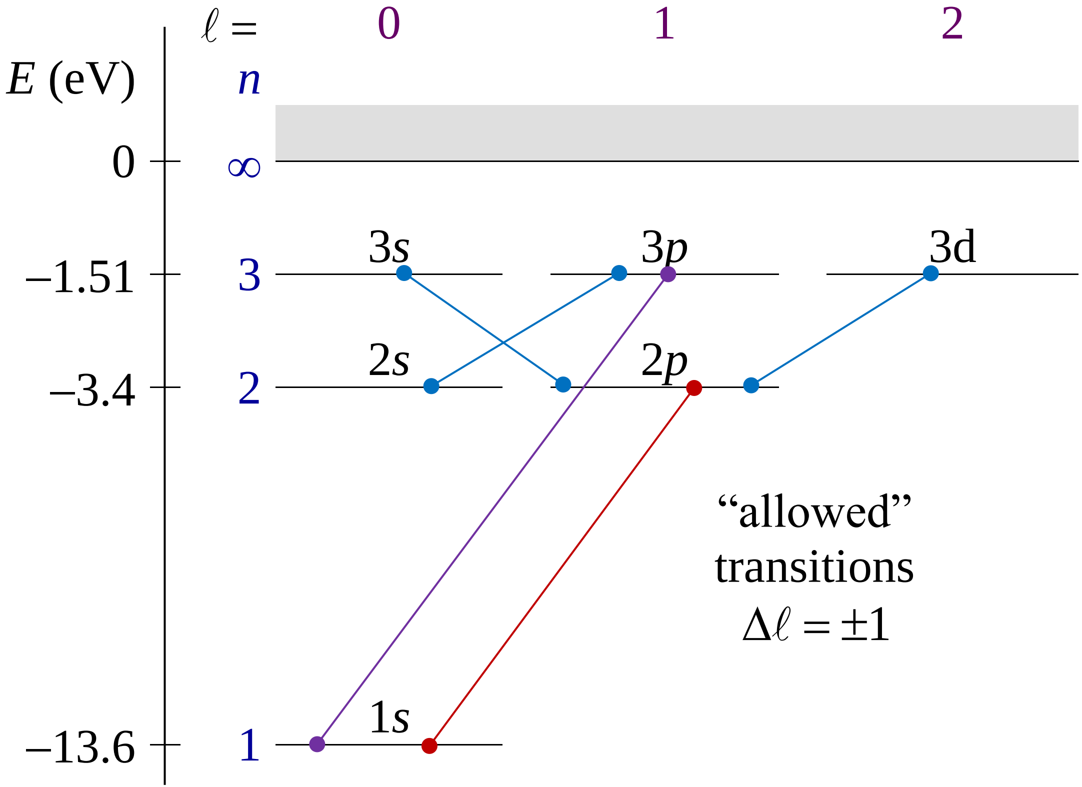
$$\begin{array}{cccccccc} \ell & \rightarrow & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ & & \text{“}s\text{”} & \text{“}p\text{”} & \text{“}d\text{”} & \text{“}f\text{”} & \text{“}g\text{”} & \cdots \end{array}$$

“n” จะบอก “ชั้น (shell)” ส่วน “ℓ” จะบอก “ชั้นย่อย (subshell)”

หมายเหตุ! มีการกำหนด “ตัวอักษร” ให้กับ ค่า “n” ด้วย

$$\begin{array}{ccccccc} n & \rightarrow & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ & & \text{“}K\text{”} & \text{“}L\text{”} & \text{“}M\text{”} & \text{“}N\text{”} & \cdots \end{array}$$

“Energy-level diagram” สำหรับ “hydrogen atom” : $E_n = -\frac{13.6}{n^2}$ eV



(1.6) “ฟังก์ชันคลื่น” ของ “อิเล็กตรอน” ใน “อะตอมไฮโดรเจน”

การบรรยาย “พฤติกรรม” ของ “electron” ด้วย/โดยใช้ “ฟังก์ชันคลื่น”
จะทำให้ “ไม่สามารถระบุตำแหน่งของ electron ได้อย่างแน่นอน”
บอกได้เพียงว่า “โอกาสที่จะพบ electron ในบริเวณต่างๆ มีมากน้อยเพียงใด”

↓

ใน “กลศาสตร์ควอนตัม”
“โครงสร้างของอะตอม” จะมีลักษณะเป็น
“กลุ่มหมอก” ของ “electron” กระจายอยู่รอบ “นิวเคลียส”

↓

“ลักษณะของการกระจาย” ของ “electron” จะขึ้นกับ/ถูกกำหนดโดย “ฟังก์ชันคลื่น”

$$\psi_{n\ell m_\ell}(\vec{\boldsymbol{r}}) = R_{n\ell}(r)\, Y_{\ell m_\ell}(\theta, \phi)$$

"Radial Part, $R_{n\ell}(r)$" ของ "ฟังก์ชันคลื่น" ("Z" คือจำนวน "proton" ใน "nucleus")

$$R_{10} = 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$$

$$R_{21} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\left(\frac{Zr}{2a_0}\right)e^{-Zr/2a_0}$$

$$R_{20} = 2\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\left\{1-\left(\frac{Zr}{2a_0}\right)\right\}e^{-Zr/2a_0}$$

$$R_{32} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}\left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{3/2}\left(\frac{Zr}{3a_0}\right)^2 e^{-Zr/3a_0}$$

$$R_{31} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{3/2}\left(\frac{Zr}{3a_0}\right)\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{Zr}{3a_0}\right)\right\}e^{-Zr/3a_0}$$

$$R_{30} = 2\left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{3/2}\left\{1-2\left(\frac{Zr}{3a_0}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{Zr}{3a_0}\right)^2\right\}e^{-Zr/3a_0}$$

“Angular Part” ของ “ฟังก์ชันคลื่น” → “Spherical Harmonics, $Y_{\ell m_\ell}(\theta,\phi)$”

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{10} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4\pi}} \cos\theta \qquad Y_{1\pm1} = \mp\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8\pi}} \sin\theta\, e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{20} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1) \qquad Y_{2\pm1} = \mp\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{8\pi}} \sin\theta\cos\theta\, e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2\pm2} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{32\pi}} \sin^2\theta\, e^{\pm 2i\phi} \qquad Y_{30} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16\pi}} \cos\theta\,(5\cos^2\theta - 3)$$

$$Y_{3\pm1} = \mp\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{64\pi}} \sin\theta\,(5\cos^2\theta - 1)\, e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{3\pm2} = \frac{\sqrt{105}}{\sqrt{32\pi}} \cos\theta\sin^2\theta\, e^{\pm 2i\phi} \qquad Y_{3\pm3} = \mp\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{64\pi}} \sin^3\theta\, e^{\pm 3i\phi}$$

“ฟังก์ชันคลื่น” $\psi_{n\ell m_\ell}(\vec{\boldsymbol{r}}) = R_{n\ell}(r)\ Y_{\ell m_\ell}(\theta,\phi)$ จะ “ไม่บอกอะไรโดยตรง”

(ไม่มี direct physical meaning)

“กำลังสอง” ของ “ขนาด” ของ “ฟังก์ชันคลื่น”

$$\left|\psi_{n\ell m_\ell}(\vec{\boldsymbol{r}})\right|^2 = \psi^*_{n\ell m_\ell}(\vec{\boldsymbol{r}})\psi_{n\ell m_\ell}(\vec{\boldsymbol{r}}) = R^*_{n\ell}(r)R_{n\ell}(r)\ Y^*_{\ell m_\ell}(\theta,\phi)Y_{\ell m_\ell}(\theta,\phi)$$

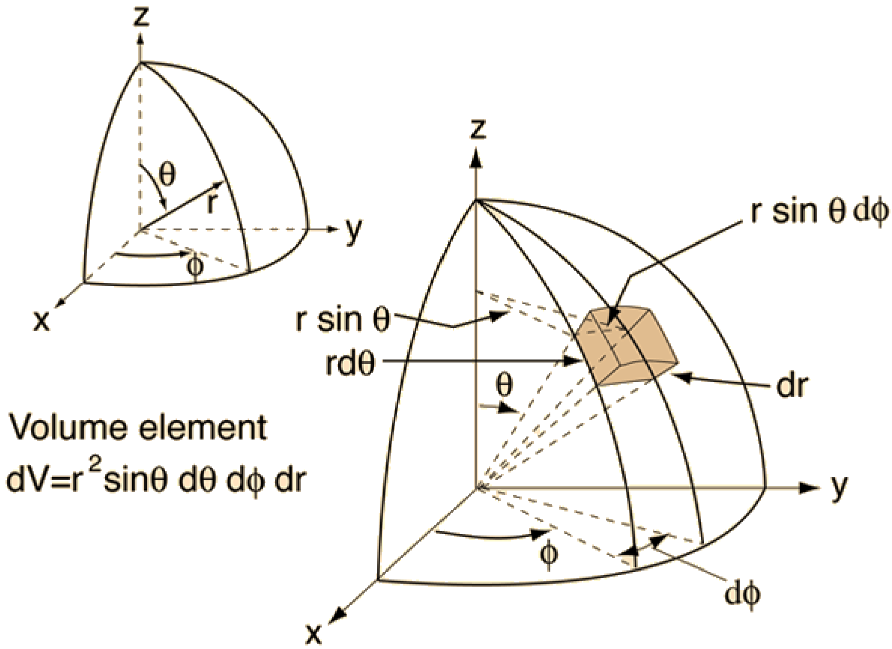
จะบอกถึง “ความหนาแน่นของโอกาส (probability density) [ที่จะพบอิเล็กตรอน]”

“โอกาสที่จะพบ electron” ใน “ปริมาตรเล็กๆ (volume element, dV)” คือ

$$\left|\psi_{n\ell m_\ell}(\vec{\boldsymbol{r}})\right|^2 dV = R^*_{n\ell}(r)R_{n\ell}(r)\ Y^*_{\ell m_\ell}(\theta,\phi)Y_{\ell m_\ell}(\theta,\phi)\ dV$$

“ปริมาตรเล็กๆ (volume element, dV)” ใน “Spherical Coordinates (r, θ, ϕ)” คือ

$$dV = (rd\theta)(r\sin\theta d\phi)(dr) = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$$



http://2.bp.blogspot.com/-vVUBpacUEVw/VO_U-ZAsDjI/AAAAAAAABJ0/cza5oNQTh9g/s1600/sphcoordel.png

"โอกาสที่จะพบ electron" ใน "ปริมาตรเล็กๆ: $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$" คือ

$$R_{n\ell}^*(r) R_{n\ell}(r)\, Y_{\ell m_\ell}^*(\theta,\phi) Y_{\ell m_\ell}(\theta,\phi)\, r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

"โอกาสที่จะพบ electron" ใน "spherical shell" ที่มี "รัศมีภายใน r" และ "หนา dr"
(มี "รัศมีภายนอก $r + dr$")

หาได้โดย integrate ทุกค่าที่เป็นไปได้ของ θ [จาก 0 ถึง π] และ ϕ [จาก 0 ถึง 2π]

$$r^2 R_{n\ell}^*(r) R_{n\ell}(r) \left[\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_{\ell m_\ell}^*(\theta,\phi) Y_{\ell m_\ell}(\theta,\phi)\, \sin\theta d\theta d\phi \right] dr$$

$$= r^2 R_{n\ell}^*(r) R_{n\ell}(r)\, dr \equiv P_{n\ell}(r)\, dr$$

$$\left[\because \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_{\ell m_\ell}^*(\theta,\phi) Y_{\ell m_\ell}(\theta,\phi)\, \sin\theta d\theta d\phi = 1 \left(\begin{array}{c} \text{เป็นสมบัติของ} \\ \text{Spherical Harmonics} \end{array} \right) \right]$$

“โอกาสที่จะพบ electron” ใน “spherical shell” ที่มี “รัศมีภายใน r” และ “หนา dr” คือ

$$r^2 R_{n\ell}^*(r) R_{n\ell}(r)\, dr \equiv P_{n\ell}(r)\, dr$$

$$\downarrow$$

$P_{n\ell}(r) \equiv r^2 R_{n\ell}^*(r) R_{n\ell}(r) \equiv$ “Radial” Probability Density

“ความหนาแน่นของโอกาส (ที่จะพบ electron) ในแนวรัศมี”

ซึ่งบอกถึง

“โอกาสที่จะพบ electron” ใน “spherical shell” ที่มี “รัศมีภายใน r” และ “หนา 1 หน่วย”

$$\downarrow$$

$$\int_0^\infty r^2 R_{n\ell}^*(r) R_{n\ell}(r)\, dr \equiv \int_0^\infty P_{n\ell}(r)\, dr = 1$$

(“Normalization” Condition)

“สถานะพื้น (ground state)”:

$$n = 1 \rightarrow \ell = 0 \rightarrow m_\ell = 0 \rightarrow 1 \text{ state} \rightarrow \psi_{100}(\vec{\boldsymbol{r}}) = R_{10}(r)Y_{00}(\theta, \phi)$$

$$R_{10}(r) = 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$$

$$Y_{00}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$P_{10}(r) = r^2 R_{10}^*(r) R_{10}(r) = r^2 |R_{10}(r)|^2 = r^2 \left[2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}\right]^2$$

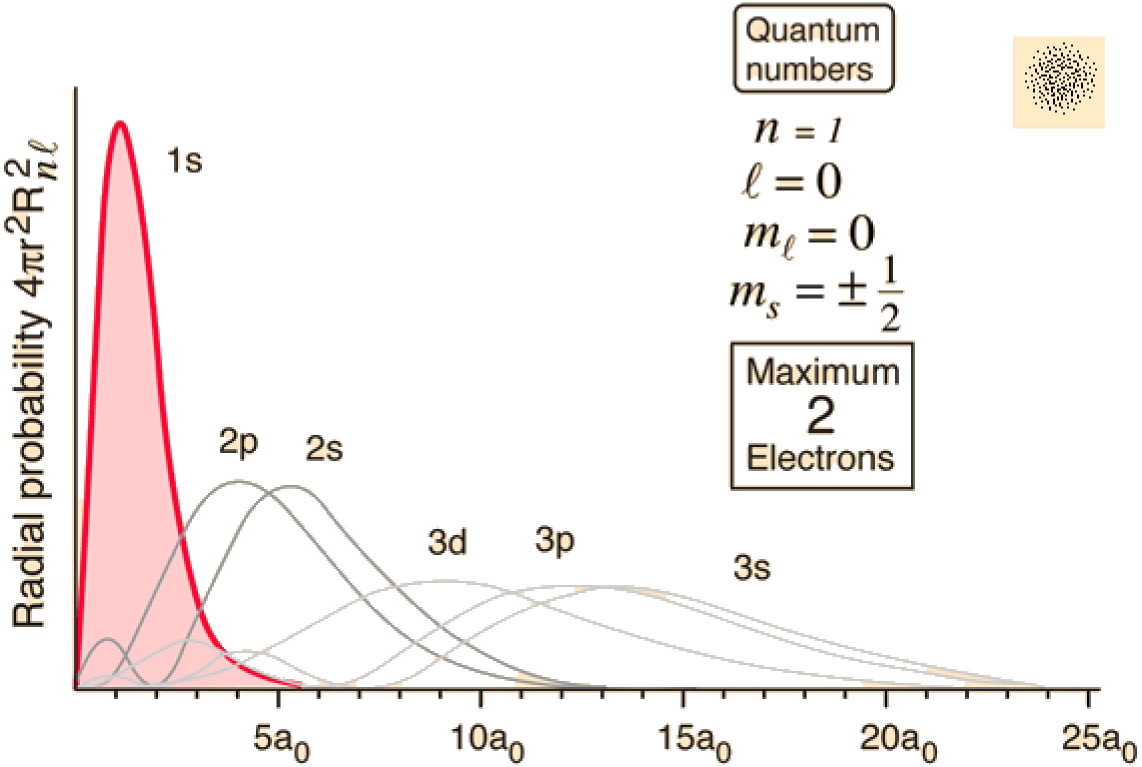
$$P_{10}(r) = 4\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 r^2 e^{-2Zr/a_0}$$

“สถานะถูกกระตุ้นลำดับที่หนึ่ง (first-excited states)”:

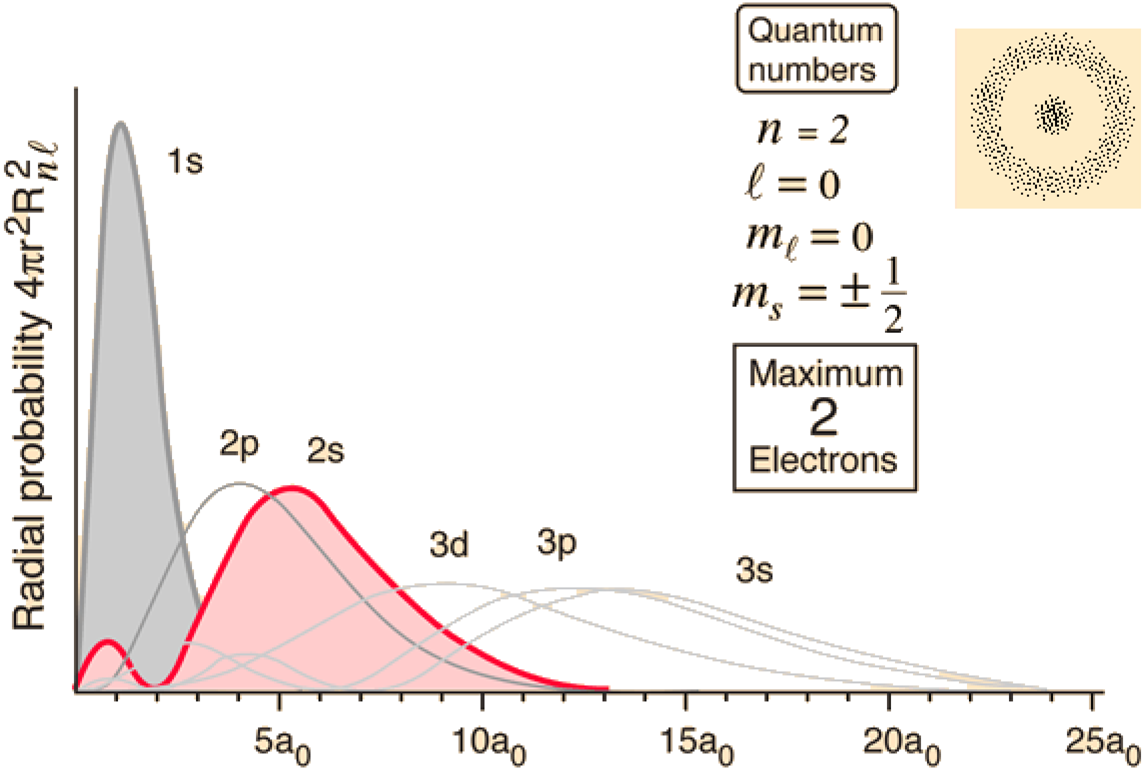
$$n = 2 \rightarrow \begin{Bmatrix} \ell = 0 \rightarrow m_\ell = 0 \rightarrow 1 \text{ state} \\ \ell = 1 \rightarrow m_\ell = -1, 0, +1 \rightarrow 3 \text{ states} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \psi_{200}(\vec{r}) \\ \psi_{21-1}(\vec{r}) \\ \psi_{210}(\vec{r}) \\ \psi_{21+1}(\vec{r}) \end{cases}$$

$$P_{21}(r) = r^2 |R_{21}(r)|^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^3 \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^2 r^4 e^{-Zr/a_0}$$

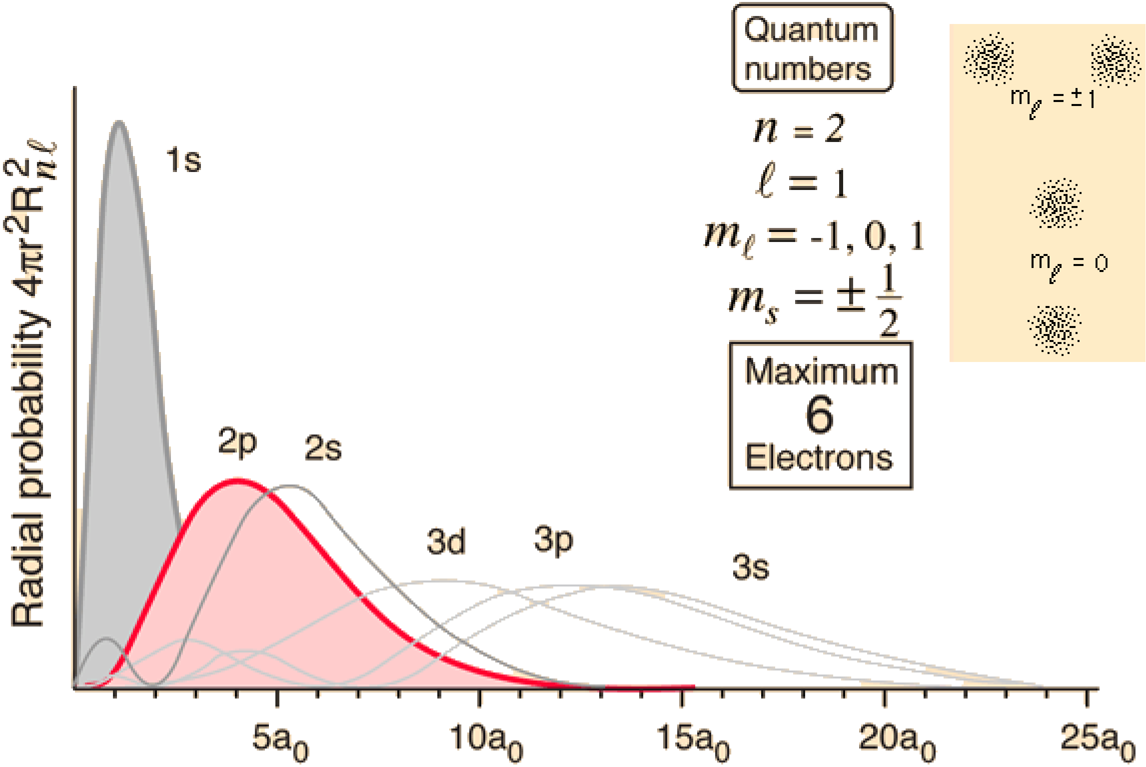
$$P_{20}(r) = r^2 |R_{20}(r)|^2 = 4\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^3 \left(1 - \frac{Zr}{2a_0}\right)^2 r^2 e^{-Zr/a_0}$$



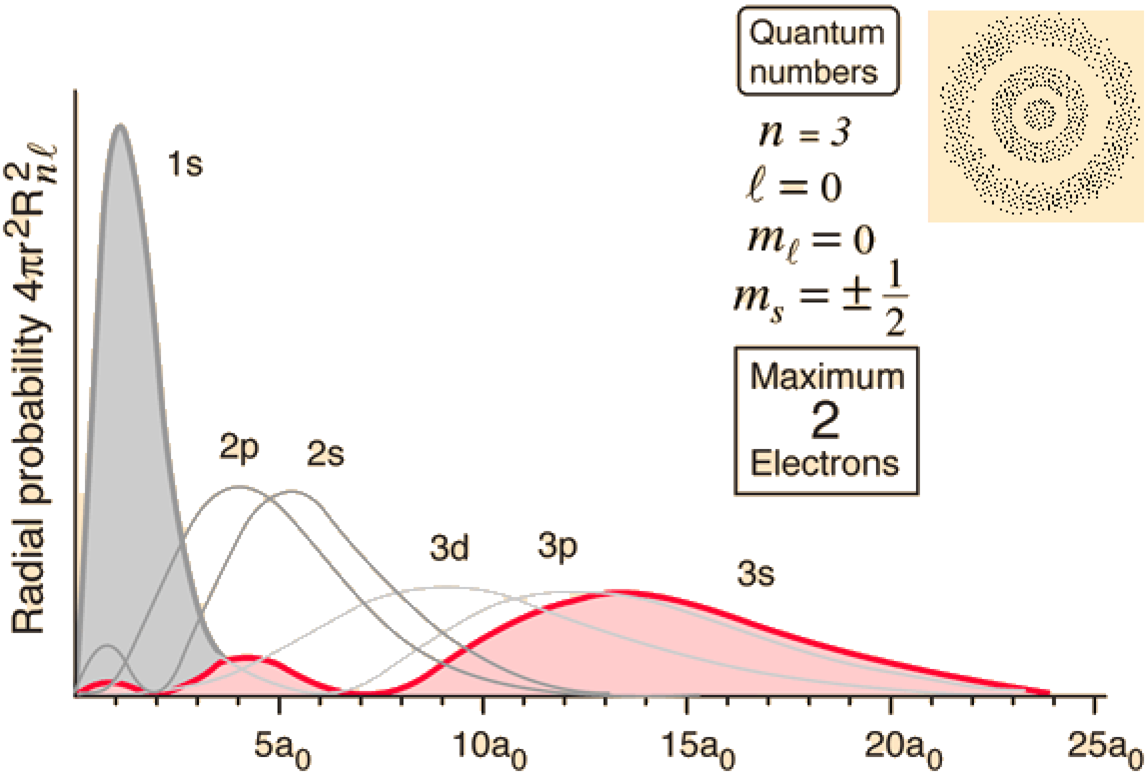
http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hydwf.html



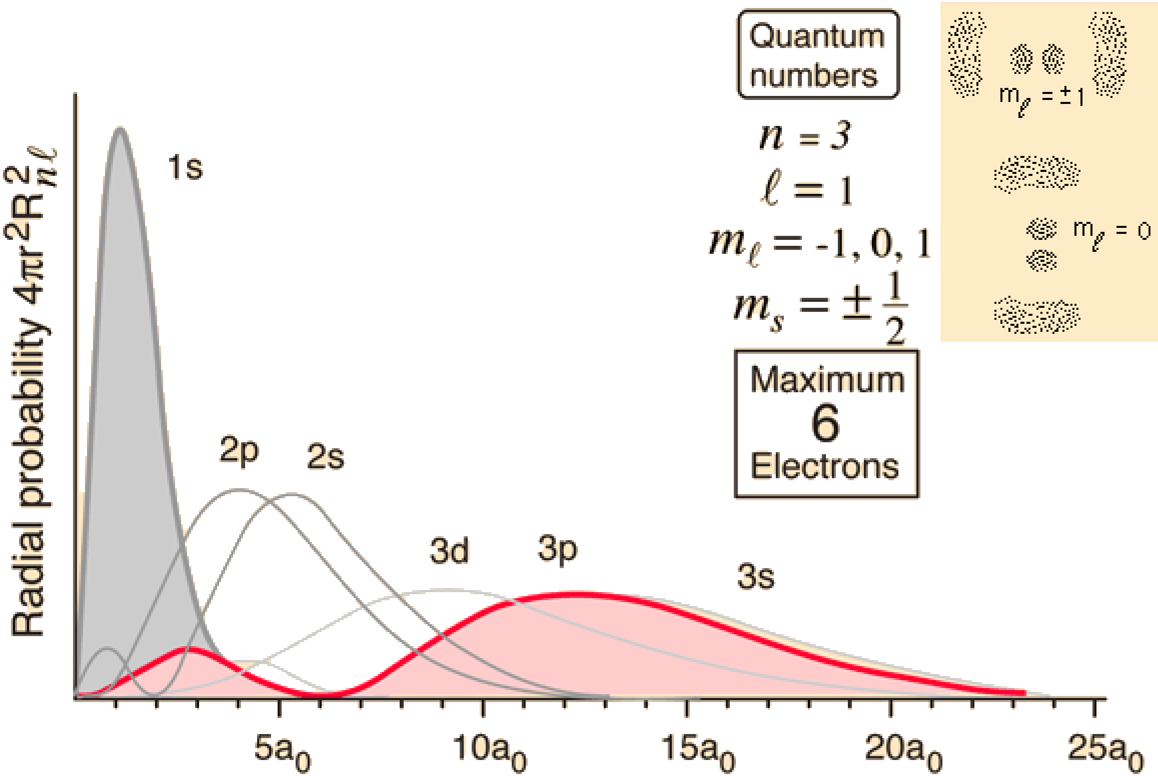
http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hydwf.html



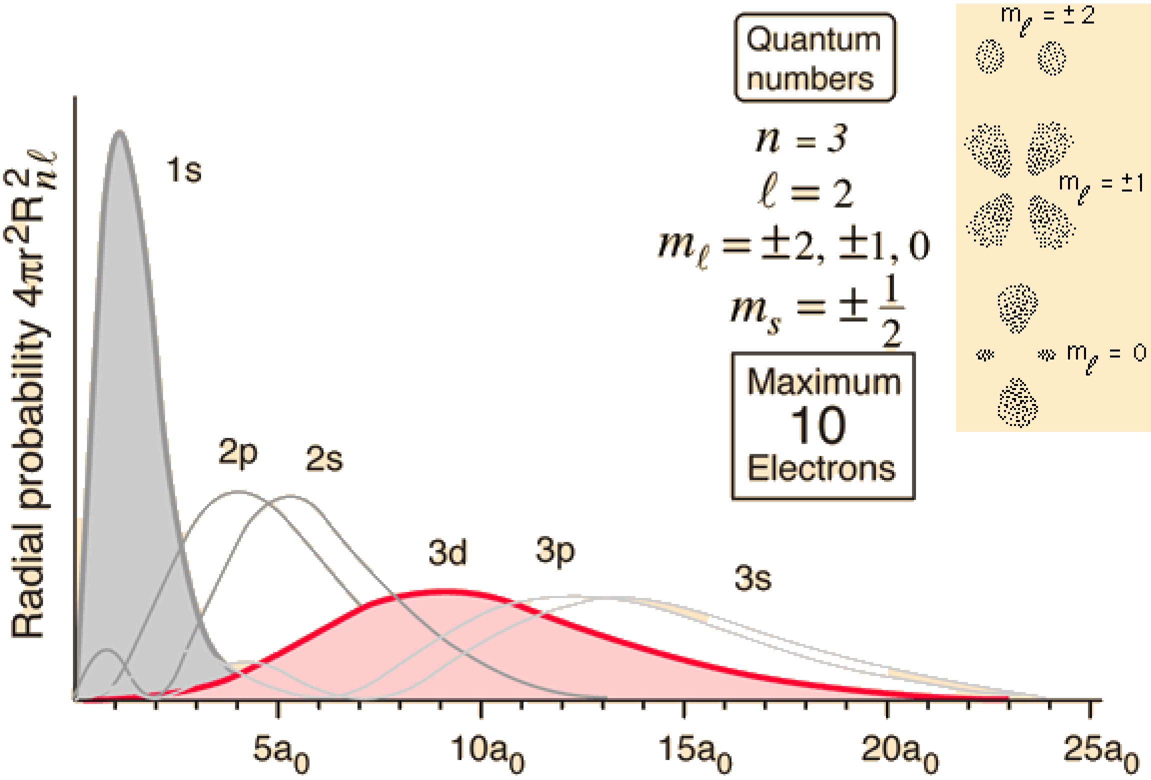
http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hydwf.html



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hydwf.html



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hydwf.html



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hydwf.html

การหา “radial distance” ที่ “$P_{n,n-1}(r)$” (ซึ่งมี “one” maxima) มีค่า “สูงสุด”

เนื่องจาก $$R_{n,n-1}(r) \propto r^{n-1} e^{-Zr/na_0}$$

ดังนั้น $$P_{n,n-1}(r) = r^2 \left|R_{n,n-1}(r)\right|^2 \propto r^{2n} e^{-2Zr/na_0}$$

ค่าของ “radial distance” ที่ $P_{n,n-1}(r) = r^2 \left|R_{n,n-1}(r)\right|^2$ มี “ค่าสูงสุด” (r_{max}) หาได้โดยการ “แก้สมการ”

$$\frac{d}{dr} P_{n,n-1}(r) = 0 \;\rightarrow\; \frac{d}{dr}\left(r^{2n} e^{-2Zr/na_0}\right) = 0 \;\rightarrow$$

$$2nr^{2n-1} e^{-2Zr/na_0} - \left(\frac{2Z}{na_0}\right) r^{2n} e^{-2Zr/na_0} = 0$$

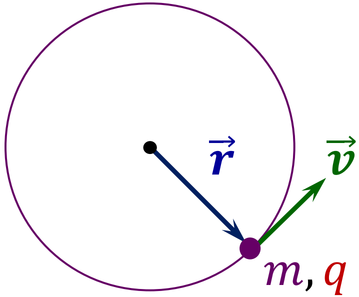
$\rightarrow$ $$r_{max} = n^2 \left(\frac{a_0}{Z}\right) = \text{“most probable distance”}$$

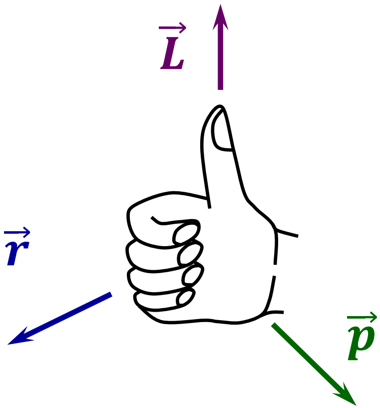
$n \uparrow \;\rightarrow\; r_{max} \uparrow$ และ $Z \uparrow \;\rightarrow\; r_{max} \downarrow$

(2) โมเมนตัมเชิงมุม (Angular Momentum)

(2.1) "Orbital" Angular Momentum ($\vec{L}$)

พิจารณาการเคลื่อนที่ของ "อนุภาค" ที่มี "มวล m" และ "ประจุ q" เป็นวงกลม "รัศมี r" ด้วย "ความเร็ว $\vec{v}$" บน "ระนาบของกระดาษ" ในทิศ "ทวนเข็มนาฬิกา"





Classical Mechanics :

"orbital" angular momentum ของ "อนุภาค" คือ

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = mvr\,\hat{e}_{out}$$

(ทิศ "พุ่งออก")

"$\vec{L}$" มีค่าเป็น "เท่าใดก็ได้" ทั้ง "ขนาด" และ "ทิศทาง"

Quantum Mechanics $\rightarrow$ $\vec{L}_{\text{op}} = \vec{r}_{\text{op}} \times \vec{p}_{\text{op}} = \vec{r} \times (i\hbar\vec{\nabla})$

$\rightarrow$ "$\vec{L}$" มี "ขนาด" ได้เฉพาะ "บางค่า" และ "วางตัว" ได้เฉพาะใน "บางทิศทาง"

(เรียก "Space Quantization")

$\rightarrow$ "ข้อมูลที่มากที่สุด" ที่สามารถรู้ได้เกี่ยวกับ "$\vec{L}$" คือ

(i) "ขนาด" ของ "โมเมนตัมเชิงมุมแบบวงโคจร"

$$L = |\vec{L}| = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar \quad \text{หรือ} \quad L^2 = |\vec{L}|^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2$$

$$\ell = 0, 1, 2, \ldots$$

(ii) "องค์ประกอบในแนวแกนใดแกนหนึ่ง" (เพียงแกนเดียว) $\rightarrow$ เลือกเป็น "แกน z"

$\rightarrow$ "z–component" ของ "โมเมนตัมเชิงมุมแบบวงโคจร"

$$L_z = z - \text{component ของ } \vec{L} = m_\ell \hbar$$

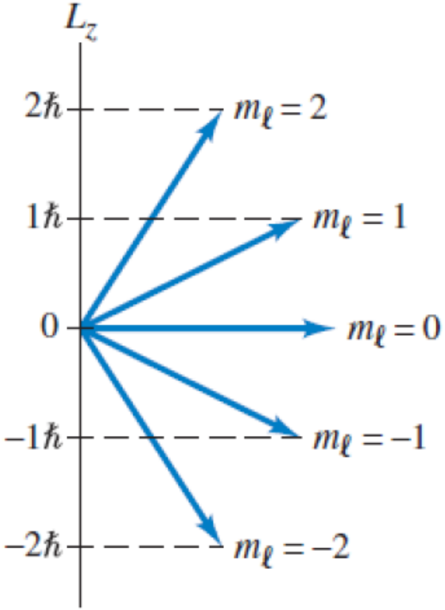
$$m_\ell = -\ell, -\ell+1, \ldots, 0, \ldots, \ell-1, \ell \quad \rightarrow \quad \text{"}(2\ell+1)\text{ ค่า"}$$

ตัวอย่าง : สำหรับ "อนุภาค" ที่มี $\ell = 2$ จะได้

$$L = |\vec{\boldsymbol{L}}| = \sqrt{2(2+1)}\,\hbar = \sqrt{6}\,\hbar = 2.45\,\hbar$$

และ

$$L_z = m_\ell \hbar = -2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar \quad (5 \text{ ค่า})$$



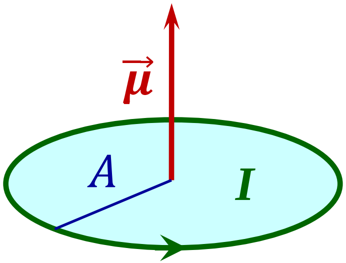
“Classical Electromagnetism” $\rightarrow$

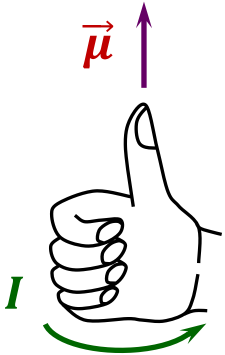
“การเคลื่อนที่” ของ “อนุภาคที่มีประจุไฟฟ้า” ทำให้เกิด “กระแสไฟฟ้า (electric current, I)”

“กระแสไฟฟ้า” ทำให้เกิด “สนามแม่เหล็ก (magnetic field, $\vec{B}$)”

“กระแสไฟฟ้า I” ที่ไหลเป็น “วงปิด” ล้อมรอบ “พื้นที่ A” จะแสดงพฤติกรรมเสมือนเป็น “แท่งแม่เหล็ก” ที่มี “โมเมนต์ขั้วคู่แม่เหล็ก (magnetic dipole moment, $\vec{\mu}$)”

$$\vec{\mu} = IA\,\hat{e}$$

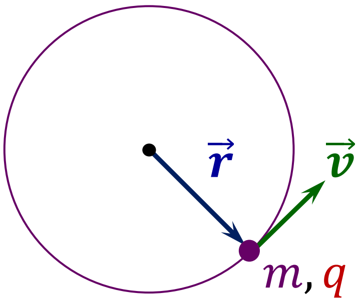




มี “ขนาด” เท่ากับ “ผลคูณ” ของ “กระแสไฟฟ้า I” กับ “พื้นที่ A (ที่กระแสไฟฟ้าล้อมรอบ)”

มี “ทิศ” ตามที่กำหนดโดย “กฎมือขวา (Right Hand Rule)”

“ความสัมพันธ์” ระหว่าง “orbital angular momentum” กับ “magnetic dipole moment”



พิจารณาการเคลื่อนที่ของ “อนุภาค” ที่มี “มวล m” และ “ประจุ q” เป็นวงกลม “รัศมี r” ด้วย “ความเร็ว $\vec{v}$” บน “ระนาบของกระดาษ” ในทิศ “ทวนเข็มนาฬิกา”

“orbital” angular momentum ของ “อนุภาค” คือ

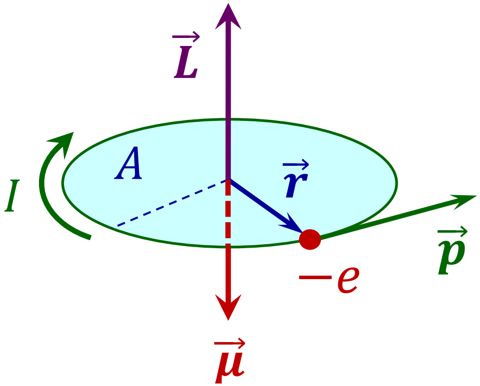
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = mvr\,\hat{e}_{out}$$ (ทิศ “พุ่งออก”)

“orbital” magnetic dipole moment ของ “อนุภาค” คือ

$$\vec{\mu}_L = IA\,\hat{e}_{out} = \left(\frac{q}{T}\right)(\pi r^2)\hat{e}_{out} = \left(\frac{qv}{2\pi r}\right)(\pi r^2)\hat{e}_{out} = \left(\frac{qvr}{2}\right)\hat{e}_{out}$$

ดังนั้น

$$\vec{\mu}_L = \left(\frac{q}{2m}\right)\vec{L}$$



สำหรับ "electron" ซึ่งมี "ประจุ" เป็น "ลบ" $(q = -e) \rightarrow$

$$\vec{\mu}_L = -\left(\frac{e}{2m}\right)\vec{L}$$

("m" คือ มวลของ electron)

ใน "Quantum Mechanics" $\rightarrow$ นิยมเขียน "ความสัมพันธ์" ระหว่าง "orbital" angular momentum กับ "orbital" magnetic dipole moment ของ "electron" ในรูป

$$\vec{\mu}_L = -\left(\frac{e}{2m}\right)\vec{L} = -\left(\frac{e\hbar}{2m}\right)\frac{\vec{L}}{\hbar} = -\left(\frac{\mu_B}{\hbar}\right)\vec{L}$$

เมื่อ

$$\mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m} \equiv \text{"Bohr magneton"}$$

“Generalization”

“angular momentum ทุกประเภท” ซึ่งจะเขียนแทนด้วย “$\vec{J}$” จะ “มีสมบัติทั่วไปเหมือนกัน”

→ “ขนาด” จะถูกกำหนดโดย quantum number “j” ซึ่งมีค่าเป็น “บวก” หรือ “ศูนย์”

$$J = |\vec{J}| = \sqrt{j(j+1)}\hbar \quad \text{หรือ} \quad J^2 = |\vec{J}|^2 = j(j+1)\hbar^2$$

→ “องค์ประกอบในแนวแกน Z” จะถูกกำหนดโดย quantum number “m_j” ซึ่งมีค่า “เพิ่มขึ้นทีละหนึ่ง” จาก “$-j$” ถึง “$+j$”

$$m_j = -j, -j+1, \ldots, 0, \ldots, j-1, j \quad \rightarrow \quad \text{“}(2j+1)\text{ ค่า”}$$

→ “ค่าที่เป็นไปได้” ของ “j” คือ “ศูนย์” หรือ “จำนวนเต็มบวก (positive integer)” หรือ “จำนวนครึ่งบวก (positive half-integer)”

“ความสัมพันธ์” ระหว่าง “angular momentum” กับ “magnetic dipole moment” จะ “มีรูปแบบเดียวกัน” สำหรับ “angular momentum ทุกประเภท”

(2.2) "Spin" หรือ "Intrinsic Spin" Angular Momentum ($\vec{S}$)

นอกจาก "orbital" angular momentum ($\vec{L}$) ซึ่งเกี่ยวข้องกับ "การเคลื่อนที่ (โคจร) รอบ nucleus" แล้ว พบว่า

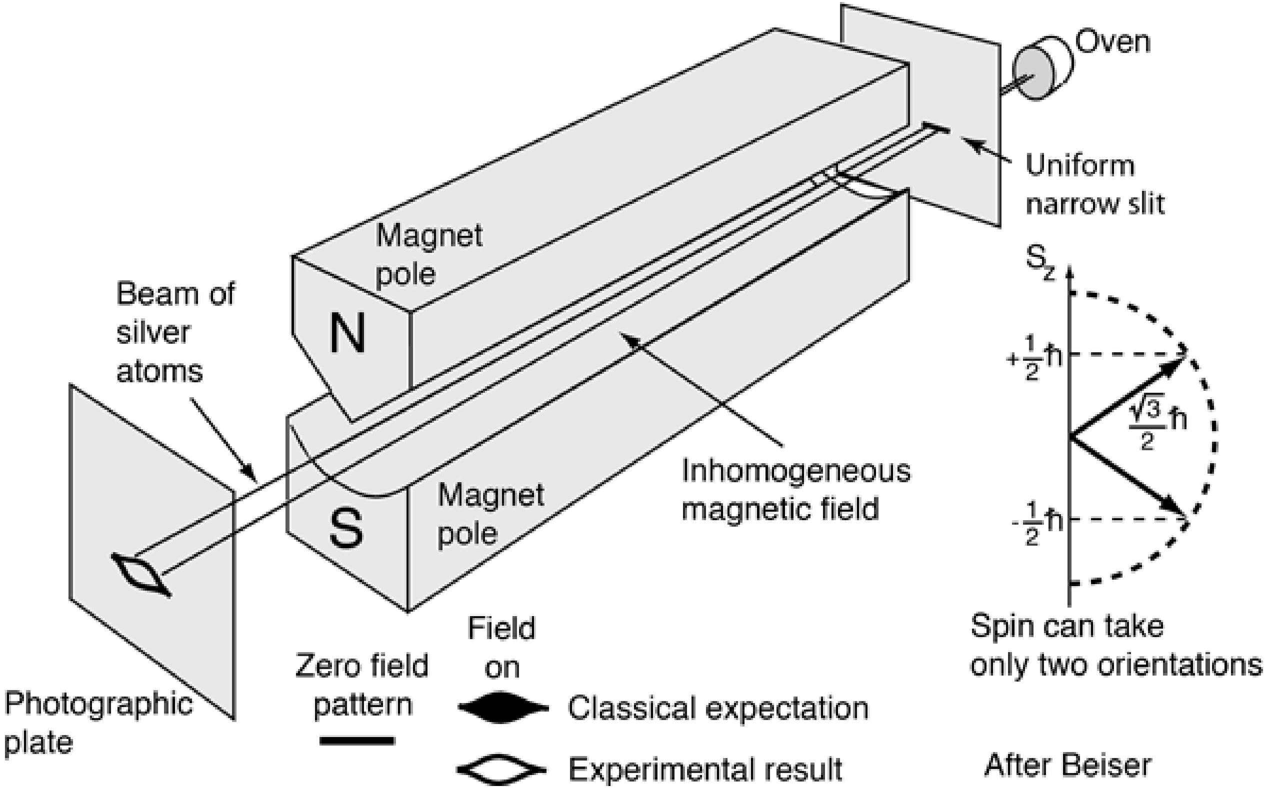
"electron" มี "intrinsic spin" angular momentum ($\vec{S}$) ด้วย

"intrinsic" $\rightarrow$ เป็น "สมบัติพื้นฐาน" ของ "electrons ทุกตัว"

"spin" $\rightarrow$ "คล้ายกับ"/"เปรียบเทียบได้กับ" การ "หมุนรอบตัวเอง" ของวัตถุ

เรา "ไม่" สามารถสรุปว่า electron มีการหมุนรอบตัวเอง เนื่องจาก (i) "electron" มีขนาดเล็กมาก จน (ในปัจจุบัน) เชื่อว่า "ไม่มีโครงสร้างภายใน" (เป็น "elementary particle") และ (ii) ผลการทดลองระบุเพียงว่า "electron" มี "angular momentum <u>อีกแบบหนึ่ง</u>" ที่ "ไม่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่แบบวงโคจร" โดย "ไม่ได้ระบุที่มาของ angular momentum"

“Stern-Gerlach” Experiment (1921-1922)



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/imgqua/steger.png

ปี 1921-1922 “Otto Stern” และ “Walther Gerlach” ทำการทดลองที่รู้จักกันในชื่อ

“Stern-Gerlach” Experiment

โดยเริ่มการทดลอง ในปี 1921 ที่ Goethe University Frankfurt ในปีเดียวกัน Stern ย้ายไปที่ University of Rostock ส่วน Gerlach ทำการทดลองต่อจนสำเร็จในปี 1922

ทำการทดลองโดย จัดให้ “silver atoms” (จาก “hot oven”) เคลื่อนที่ผ่าน “บริเวณ” ที่มี “สนามแม่เหล็กไม่สม่ำเสมอ (inhomogeneous magnetic field)” แล้วสังเกต “การเบน” ของ (“เส้นทางการเคลื่อนที่” ของ) “silver atoms”

“silver atom” จะมี “electrons 47 ตัว” โดย “inner electrons 46 ตัว” จะจัดเรียงเป็น “closed shell” เหลือ “electron ชั้นนอกสุด” เพียง “ตัวเดียว” ($\rightarrow$ ใช้ “silver atoms” เพื่อศึกษา “magnetic properties” ของ electron ได้) $\rightarrow$ “electron configuration” ของ “silver atom” คือ

$$Ag\ (Z = 47): [1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^2\ 3d^{10}\ 4p^6\ 4d^{10}]\ 5s^1$$

เนื่องจาก “electron ชั้นนอกสุด” อยู่ใน “subshell 5s” ซึ่งมี “$\ell = 0$” ($\rightarrow$ ไม่มี “orbital” magnetic dipole moment) ดังนั้น

“ไม่ (ควร) มี” “การเบน” ของ (“เส้นทางการเคลื่อนที่” ของ) “silver atoms”

{เนื่องจากไม่ (ควร) มี interaction ระหว่าง silver atoms กับ external magnetic field}

“ผลการทดลอง” ปรากฏว่า

“มี” การ “แยก” ของ (“เส้นทางการเคลื่อนที่” ของ) silver atoms เป็น 2 เส้นทาง

ปี 1925 Samuel A. Goudsmit และ George E. Uhlenbeck เสนอ (ในขณะที่ทั้งคู่ยังเป็น graduate students) ว่า

(i) “electron” มี “intrinsic spin” angular momentum ($\vec{S}$)

และ (ii) “spin” ของ “electron” สามารถ “วางตัว” ได้ “สองทิศทาง”

$\rightarrow$ อธิบาย “ผล” ของ “Stern-Gerlach Experiment” ได้

Stern–Gerlach Experiment (1921-1922)

Walther Gerlach →

(1889-1979)

นักฟิสิกส์ชาวเยอรมัน

← Otto Stern

(1887-1961)

นักฟิสิกส์ชาวเยอรมัน-อเมริกัน

1943 Nobel Prize in Physics*

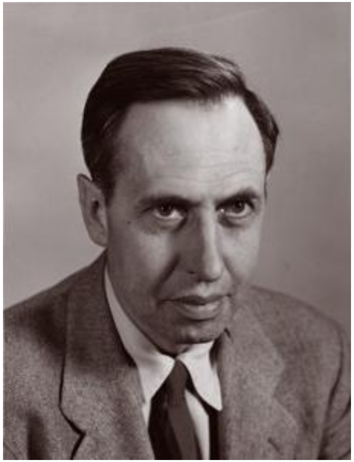
"for his contribution to the development of the molecular ray method and his discovery of the magnetic moment of the proton"

* Stern ได้รับรางวัลเพียงคนเดียว และ "Award Citation" ไม่ได้กล่าวถึง Stern-Gerlach experiment (ขณะนั้น Gerlach ยังทำงานอยู่ในเยอรมันนี ซึ่งอยู่ใต้การปกครองของนาซี) Stern ได้รับการเสนอชื่อให้ได้รับรางวัลโนเบล 82 ครั้ง (ในช่วงปี 1925-1945) เป็นลำดับสองรองจาก Arnold Sommerfeld (ได้รับการเสนอชื่อ 84 ครั้ง แต่ไม่ได้รับรางวัลเลย)

Discovery of Electron Spin

← Samuel Abraham Goudsmit
(1902-1978)
นักฟิสิกส์ชาวเนเธอร์แลนด์-อเมริกัน

George Eugene Uhlenbeck →
(1900-1988)
นักฟิสิกส์ชาวเนเธอร์แลนด์-อเมริกัน



ขณะที่ทั้งคู่เป็น graduate students ที่ University of Leiden ประเทศ Netherlands
โดยมี Paul Ehrenfest เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/ru/3/35/Samuel_Abraham_Goudsmit.jpg
http://photos.geni.com/p13/39/96/66/56/5344483f71737511/uhlenbeckgeorgee_original.jpg

"electron" มี "intrinsic spin" angular momentum ($\vec{S}$): "electron" มี "spin 1/2"

→ "ขนาด" ของ $\vec{S}$ จะถูกกำหนดโดย "intrinsic spin" quantum number "s" ซึ่งมีค่าเป็น "1/2" เพียงค่าเดียว (ต่างจาก ℓ ซึ่งมีได้หลายค่า: $\ell = 0, 1, 2, \cdots$)

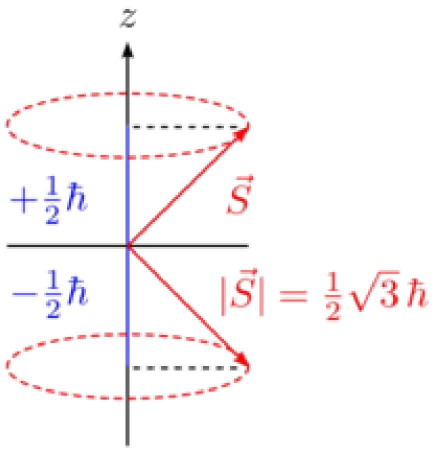
$$S = |\vec{S}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar \quad \text{หรือ} \quad S^2 = |\vec{S}|^2 = \left(\frac{3}{4}\right)\hbar^2$$

→ "องค์ประกอบในแนวแกน Z" จะถูกกำหนดโดย "spin magnetic" quantum number "m_s" ซึ่งมีค่าได้ "2 ค่า" คือ "+1/2" หรือ "−1/2" เท่านั้น

$$m_s = +\frac{1}{2} \quad (spin\ up)$$

หรือ

$$m_s = -\frac{1}{2} \quad (spin\ down)$$



http://hank.uoregon.edu/wiki/index.php/Electron_Spin_Resonance

→ “การระบุ state ของ electron ใน atom” ต้องระบุค่าของ m_s ด้วย (ไม่ต้องระบุค่า s เนื่องจาก มีค่าเป็น 1/2 เหมือนกันสำหรับ electron ทุกตัว)

$$\psi_{n\ell m_\ell}(\vec{\boldsymbol{r}}) \rightarrow \psi_{n\ell m_\ell m_s}(\vec{\boldsymbol{r}})$$

ซึ่งจะทำให้ “degeneracy” ของแต่ละค่าของ n “เพิ่มขึ้น” จาก n^2 เป็น $2n^2$

→ “intrinsic spin” magnetic dipole moment ($\vec{\boldsymbol{\mu}}_S$) จะสัมพันธ์กับ “intrinsic spin” angular momentum ($\vec{\boldsymbol{S}}$) ตามสมการ

$$\vec{\boldsymbol{\mu}}_S = -g_s\left(\frac{\mu_B}{\hbar}\right)\vec{\boldsymbol{S}} = -2\left(\frac{\mu_B}{\hbar}\right)\vec{\boldsymbol{S}}$$

เมื่อ $g_s \equiv$ “(electron) spin” gyromagnetic ratio ≈ 2 (ไม่มีหน่วย)

อนุภาคอื่นๆ ก็มี “intrinsic spin” angular momentum ($\vec{\boldsymbol{S}}$) ด้วย เช่น “proton” และ “neutron” มี “spin 1/2” ในขณะที่ “photon” มี “spin 1”

(2.3) "Total" Angular Momentum ($\vec{J}$)

"การรวม (Addition)" หรือ "การควบรวม (Coupling)" โมเมนตัมเชิงมุม

"angular momentum $\vec{J}_1(j_1, m_{j1})$" ควบรวมกับ "angular momentum $\vec{J}_2(j_2, m_{j2})$"

จะได้ผลเป็น "total" angular momentum $\vec{J}(j, m_j)$ โดยที่

ค่าที่เป็นไปได้ของ "j" {ซึ่งระบุ "ขนาด" ของ "$\vec{J}$": $J = |\vec{J}| = \sqrt{j(j+1)}\hbar$ } คือ

$$j = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \cdots, (j_1 + j_2) - 1, (j_1 + j_2)$$

และ สำหรับแต่ละค่าของ "j"

ค่าที่เป็นไปได้ของ "m_j" {ซึ่งบอก "z-component" ของ "$\vec{J}$": $J_z = m_j\hbar$ } คือ

$$m_j = -j, -j + 1, \cdots, j - 1, j$$

เรียก "j" ว่า "total" angular momentum quantum number

และ เรียก "m_j" ว่า "total" magnetic quantum number

ในกรณีเฉพาะที่เป็น "การควบรวม" ของ "orbital" angular momentum $\vec{L}(\ell, m_\ell)$ กับ "spin" angular momentum $\vec{S}$ $(s = 1/2, m_s)$ ของ "electron" ตัวเดียวกัน จะได้ว่า

(i) "ขนาด" ของ "total" angular momentum ($\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$) ของ electron คือ

$$J = |\vec{J}| = \sqrt{j(j+1)}\hbar$$

โดยที่ "j" คือ "total" angular momentum quantum number ของ electron

ในกรณีทั่วไป j จะมีค่าตั้งแต่ $|\ell - s|$ เพิ่มทีละ "1" จนถึง $(\ell + s)$

ในกรณีนี้ $s = 1/2 \rightarrow j$ จะมีค่าได้ "เพียง 2 ค่า" คือ $|\ell - 1/2|$ และ $\ell + 1/2$

ยกเว้น กรณีที่ $\ell = 0 \rightarrow j$ จะมีค่า "1/2" "เพียงค่าเดียว"

(ii) "z-component" ของ "total" angular momentum ของ electron คือ

$$J_z = m_j \hbar$$

โดยที่ "m_j" คือ "total" magnetic quantum number ของ electron

สำหรับแต่ละค่าของ "j" ค่าที่เป็นไปได้ของ "m_j" คือ

$$m_j = -j, -j+1, \cdots, j-1, j$$

(2.4) "Spectroscopic Notation"

สำหรับการระบุ "สถานะ (state)" ของ "electron" ใน "อะตอม"

ระบุโดยใช้ "ตัวเลข 2 ตัว" และ "ตัวอักษร 1 ตัว"

(#1) X $_{(\#2)}$

"ตัวเลขตัวแรก (#1)" บอกค่า "principal" quantum number (n): $n = 1, 2, 3, \cdots$

"ตัวอักษร (X)" บอกค่า "orbital" angular momentum quantum number (ℓ)

$$\begin{array}{ccccccccc} \ell & \rightarrow & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & (n-1) \\ & & \text{"}s\text{"} & \text{"}p\text{"} & \text{"}d\text{"} & \text{"}f\text{"} & \text{"}g\text{"} & \cdots & \end{array}$$

"n" จะบอก "ชั้น (shell)" ส่วน "ℓ" จะบอก "ชั้นย่อย (subshell)"

"ตัวเลขตัวที่สอง (#2)" (เขียนเป็น "ตัวห้อย (subscript)") บอกค่า "total" angular momentum quantum number (j): $j = 1/2, 3/2, 5/2, \cdots$ (จำนวนครึ่งบวก)

เช่น $2p_{1/2} \rightarrow n = 2, \ell = 1, j = 1/2$ และ $2p_{3/2} \rightarrow n = 2, \ell = 1, j = 3/2$

(3) อะตอมที่มีอิเล็กตรอนหลายตัว (multi-electron atoms)

(3.1) "หลักการกีดกัน" ของ "เพาลี" (Pauli's "Exclusion" Principle)

การจัดเรียงตัวของ electrons ใน atoms ของธาตุต่างๆ ("Electron Configuration")
จะเป็นไปตาม "หลักการกีดกัน" ของ "เพาลี" (Pauli's "Exclusion" Principle)

ใน "แต่ละ Quantum State"
ซึ่งกำหนดโดย "ชุด" ของ "Quantum Numbers" $\{n, \ell, m_\ell, m_s\}$
จะมี "electron" อยู่ได้ "เพียงตัวเดียว" เท่านั้น

หรือ

"electrons" ที่อยู่ใน "Quantum System" เดียวกัน
จะมี Quantum Numbers เหมือนกันทุกตัว "ไม่ได้" (ต้องต่างกัน "อย่างน้อย 1 ตัว")

↓

อธิบาย "ตารางธาตุ (Periodic Table of Elements)" ได้

Wolfgang Pauli (1900-1958)

Austrian-born Swiss Physicist

1945 Nobel Prize in Physics

"for the discovery of the Exclusion Principle, also called the Pauli Principle"

(https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1945/)

"I have done a terrible thing,
I have postulated a particle that cannot be detected."

"That's not right. That's not even wrong."

(3.2) "ระดับพลังงาน" ของ "อิเล็กตรอน" ใน "อะตอมที่มีอิเล็กตรอนหลายตัว"

ใน "อะตอมที่มีอิเล็กตรอนหลายตัว (Multi-electrons Atoms":

"ระดับพลังงาน" ของ "electron" จะขึ้นกับ "ทั้ง" ค่าของ "n" และค่าของ "ℓ"

โดยจะมี "ลำดับการเรียง (sequential order)" ของ "ระดับพลังงาน" เป็นดังนี้

	↙					
$1s$	↙	↙				
$2s$	$2p$	↙	↙			
$3s$	$3p$	$3d$	↙	↙		
$4s$	$4p$	$4d$	$4f$	↙	↙	
$5s$	$5p$	$5d$	$5f$	$5g$	↙	↙
$6s$	$6p$	$6d$	$6f$	$6g$	$6h$	

"อาจมีการสลับลำดับได้"

$$E: 1s \to 2s \to 2p \to 3s \to 3p \to 4s \to 3d \to 4p \to 5s \to 4d \to 5p \cdots$$

"จำนวน electrons สูงสุดที่มีได้" ใน subshell "ℓ" คือ "$2 \times (2\ell + 1)$"

[แต่ละค่าของ "ℓ" จะ มี "m_ℓ" ได้ "$2\ell + 1$" ค่า และ มี "m_s" ได้ "2" ค่า ($m_s = \pm 1/2$)]

ℓ	$\rightarrow$	$0(s)$	$1(p)$	$2(d)$	$3(f)$	$4(g)$
จำนวน electrons สูงสุด	$\rightarrow$	2	6	10	14	18

"Spectroscopic Notation" สำหรับการระบุ "Electron Configuration"

ระบุโดยใช้ "ตัวเลข 2 ตัว" และ "ตัวอักษร 1 ตัว"

$$(\#1)\ \mathrm{X}^{(\#2)}$$

"ตัวเลขตัวแรก (#1)" บอกค่า "principal" quantum number (n): $n = 1, 2, 3, \cdots$

"ตัวอักษร (X)" บอกค่า "orbital" angular momentum quantum number (ℓ)

"n" จะบอก "ชั้น (shell)" ส่วน "ℓ" จะบอก "ชั้นย่อย (subshell)"

"ตัวเลขตัวที่สอง (#2)" (เขียนเป็น "superscript") บอก "จำนวน electron ในชั้นย่อย"

(3.3) “การจัดเรียงของอิเล็กตรอน” ใน “สถานะพื้น” ของ “อะตอมที่มีอิเล็กตรอนหลายตัว” (Ground-state Electron Configuration)

เริ่ม “เติม electron” จาก “ระดับพลังงานต่ำสุด” ก่อน

Hydrogen (H)	$Z = 1$	$\rightarrow$	$1s^1$
Helium (He)	$Z = 2$	$\rightarrow$	$1s^2$ (เต็ม subshell)
Lithium (Li)	$Z = 3$	$\rightarrow$	$1s^2\,2s^1$
Barium (Ba)	$Z = 4$	$\rightarrow$	$1s^2\,2s^2$ (เต็ม subshell)
Boron (B)	$Z = 5$	$\rightarrow$	$1s^2\,2s^2\,2p^1$
Neon (Ne)	$Z = 10$	$\rightarrow$	$1s^2\,2s^2\,2p^6$ (เต็ม subshell)
Sodium (Na)	$Z = 11$	$\rightarrow$	$1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^1$
Argon (Ar)	$Z = 18$	$\rightarrow$	$1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6$ (เต็ม subshell)
Potassium (K)	$Z = 19$	$\rightarrow$	$1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,4s^1$ (ไม่ใช่ $3d^1$)
Silver (Ag)	$Z = 47$	$\rightarrow$	$1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,4s^2\,3d^{10}\,4p^6\,4d^{10}\,5s^1$

มีการสลับลำดับ

(4) "สเปกตรัม" ของ ("คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า" ที่) "อะตอม" ("ดูดกลืน" หรือ "แผ่ออกมา") (Atomic Spectra)

"การเปลี่ยนระดับพลังงาน (Transition)" ของ "electron" ใน "อะตอม"

(*a*) ถ้าเป็นการเปลี่ยนจาก "ระดับที่มีพลังงานต่ำ" ไปยัง "ระดับที่มีพลังงานสูงกว่า" จะต้องมี "การรับ/ดูดกลืนพลังงาน" จาก "สิ่งแวดล้อม" เรียกกระบวนการนี้ว่า "absorption"

(*b*) ถ้าเป็นการเปลี่ยนจาก "ระดับที่มีพลังงานสูง" ไปยัง "ระดับที่มีพลังงานต่ำกว่า" จะต้องมี "การปลดปล่อยพลังงาน" ให้แก่ "สิ่งแวดล้อม" เรียกกระบวนการนี้ว่า "emission" ซึ่งสามารถแบ่งได้เป็น 2 แบบย่อย คือ

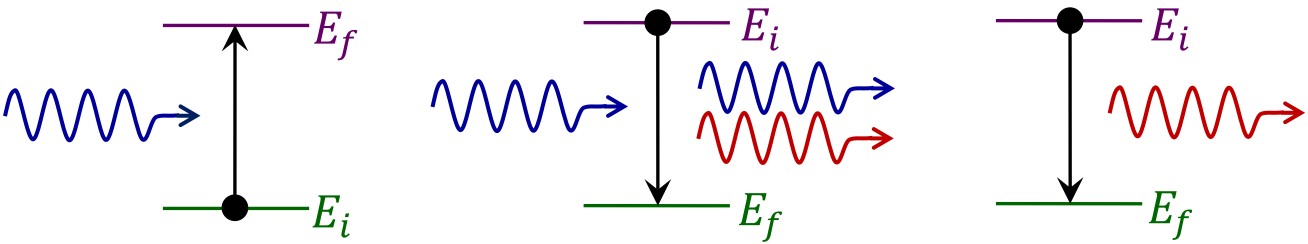
(*i*) "spontaneous" emission – เกิดขึ้นเอง "โดยธรรมชาติ" {เป็นผลสืบเนื่องจากการที่ "ระบบทางกายภาพ (physical systems)" พยายามปรับตัวเองให้อยู่ใน "สภาวะที่มีพลังงานที่ต่ำที่สุดเท่าที่เป็นไปได้"}

(*ii*) "stimulated" emission – เกิดขึ้นเมื่อระบบ "ถูกกระตุ้น" จากภายนอก

ในกรณีที่ "พลังงานที่เกี่ยวข้องในการเปลี่ยนระดับพลังงาน" อยู่ในรูป "Electromagnetic Waves (หรือ Radiations)" หรือ "photons" จะเรียก "การเปลี่ยนระดับพลังงาน" ว่า

"Radiative Transitions"

"Three Kinds" of "Radiative Transitions"



absorption

$hf + E_i = E_f$

"stimulated" emission

$hf + E_i = E_f + 2hf$

"spontaneous" emission

$E_i = E_f + hf$

"การเปลี่ยนระดับพลังงาน" ของ "electron" ใน "อะตอม" จะเป็นไปตาม "กฎ" ที่เรียกว่า "Selection Rules"

"Selection Rules" สำหรับ "hydrogen atoms"

(i) ไม่มี Selection Rule สำหรับ "principal" quantum number (n)

$$(ii)\ \ \Delta\ell = \pm 1$$

$$(iii)\ \ \Delta m_\ell = 0, \pm 1$$

$$(iv)\ \ \Delta m_s = 0$$

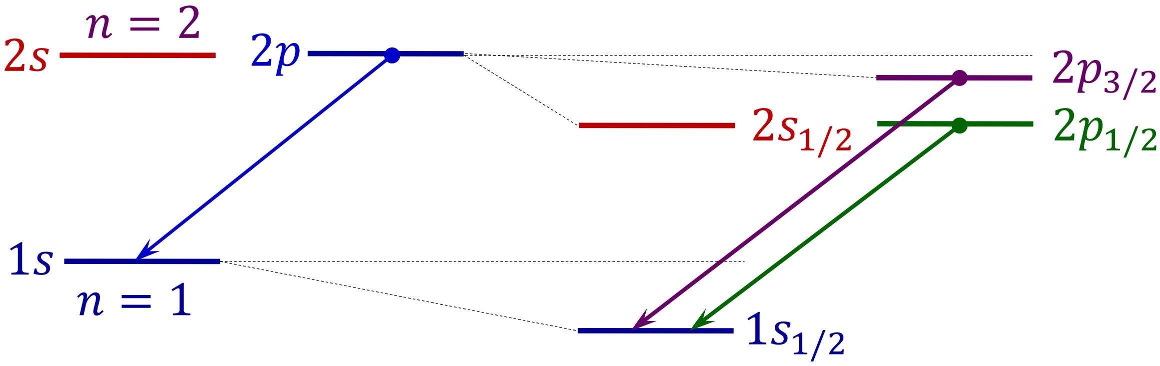
$$(v)\ \ \Delta j = 0, \pm 1$$

$$(vi)\ \ \Delta m_j = 0, \pm 1$$

"การเปลี่ยนระดับพลังงาน" ที่เป็นไปตาม "Selection Rules" จะเรียกว่า "Allowed" Transitions

"การเปลี่ยนระดับพลังงาน" ที่ "ไม่" เป็นไปตาม "Selection Rules" จะ "มีโอกาสเกิดน้อย"

พิจารณา “lowest energy spectral line” ใน “Lyman series” $n = 2 \leftrightarrow n = 1$



“non-relativistic”
Lyman “alpha” line (L_α)

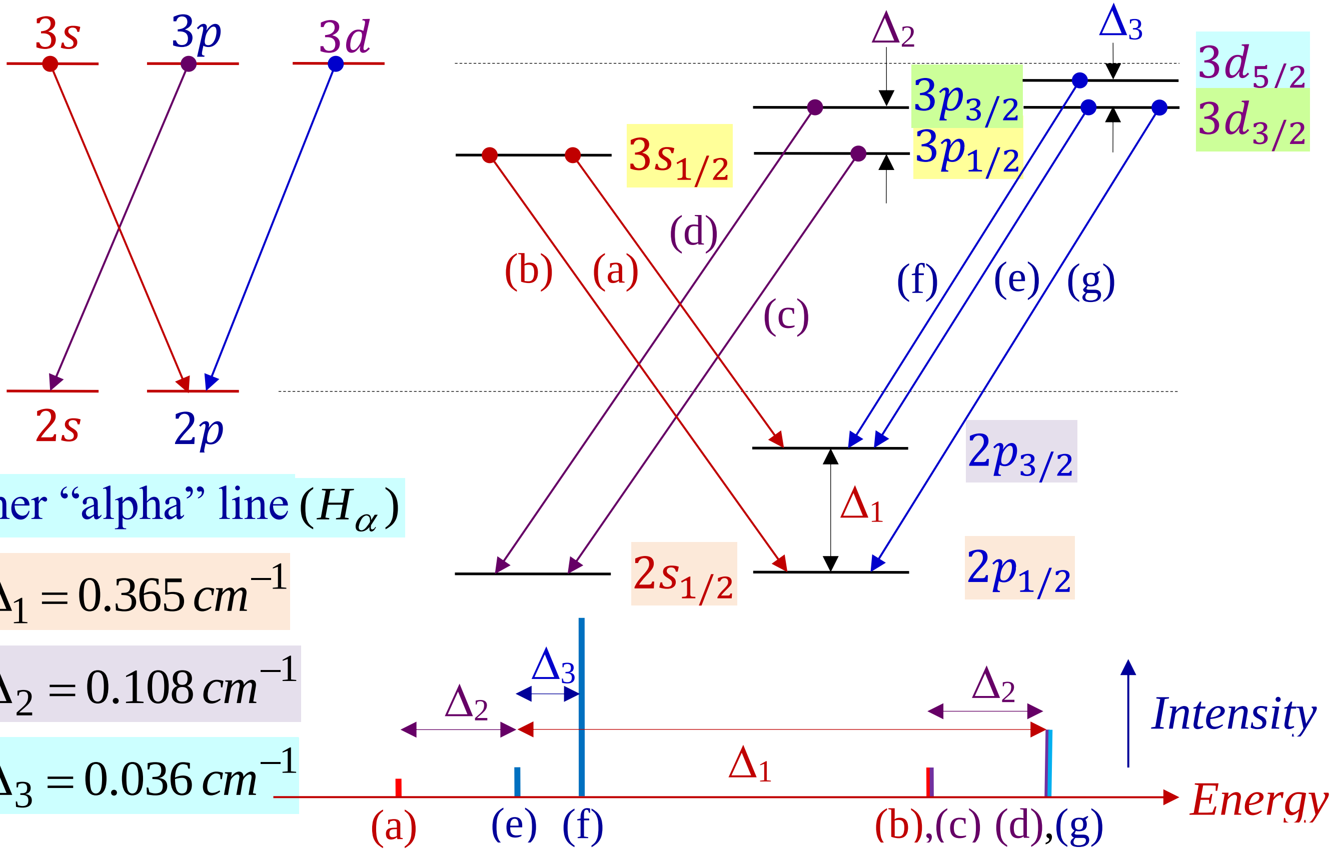
“fine structure”
Lyman “alpha” doublet

→ “แต่ละ spectrum line” ใน “Lyman series” จะแยกออกเป็น “Doublet”

→ “fine structure splitting” of “spectral line”

(“relativistic corrections” → “fine structure”)

พิจารณา “lowest energy spectral line” ใน “Balmer series” $n=3 \leftrightarrow n=2$



Balmer “alpha” line (H_α)

$$\Delta_1 = 0.365\, cm^{-1}$$

$$\Delta_2 = 0.108\, cm^{-1}$$

$$\Delta_3 = 0.036\, cm^{-1}$$

(5) ปรากฏการณ์ซีแมน (Zeeman Effect)

"การแยก" ของ "ระดับพลังงาน" [ของ ("electron" ใน) "อะตอม"]

เนื่องจาก "สนามแม่เหล็กสถิตจากภายนอก (external static magnetic field, $\vec{\boldsymbol{B}}$)"

(ซึ่งสังเกตได้จาก "การแยก"ของ "spectrum lines")

จะพิจารณากรณี "strong magnetic field" ($\rightarrow$ ไม่คำนึงถึง "fine structure")

"electron" มีทั้ง (i) "orbital" magnetic dipole moment

$$\vec{\boldsymbol{\mu}}_L = -\left(\frac{\mu_B}{\hbar}\right)\vec{\boldsymbol{L}}$$

เมื่อ

$$\mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m} \equiv \text{"Bohr magneton"}$$

และ (ii) "intrinsic spin" magnetic dipole moment ($\vec{\boldsymbol{\mu}}_S$)

$$\vec{\boldsymbol{\mu}}_S = -g_s\left(\frac{\mu_B}{\hbar}\right)\vec{\boldsymbol{S}} = -2\left(\frac{\mu_B}{\hbar}\right)\vec{\boldsymbol{S}}$$

เมื่อ $g_s \equiv$ "(electron) spin" gyromagnetic ratio ≈ 2 (ไม่มีหน่วย)

ดังนั้น “total” magnetic dipole moment ของ electron คือ

$$\vec{\boldsymbol{\mu}} = \vec{\boldsymbol{\mu}}_L + \vec{\boldsymbol{\mu}}_S = -\left(\frac{\mu_B}{\hbar}\right)\left(\vec{\boldsymbol{L}} + 2\vec{\boldsymbol{S}}\right)$$

“Classical Electromagnetism” → “potential energy” เนื่องจาก “interaction” ระหว่าง “magnetic dipole moment $\vec{\boldsymbol{\mu}}$” กับ “magnetic field $\vec{\boldsymbol{B}} = B\hat{\boldsymbol{e}}_z$” คือ

$$U_B = -\vec{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = -\mu_z B = \left(\frac{\mu_B}{\hbar}\right)(L_z + 2S_z)B$$

(สมการข้างบนยังคงใช้ได้ใน Quantum Mechanics ด้วย)

ต้องนำ “พลังงานนี้” ไปรวมกับ “พลังงานเดิม” (ของ electron) “ก่อนจะมีสนามแม่เหล็ก” ซึ่งจะทำให้เกิด “การแยก” ของ “ระดับพลังงาน” ตามค่าของ “$m_\ell + 2m_s$”

$$\Delta E_B = (m_\ell + 2m_s)\mu_B B$$

(ซึ่งนำไปสู่ “การแยก” ของ “spectrum lines”)

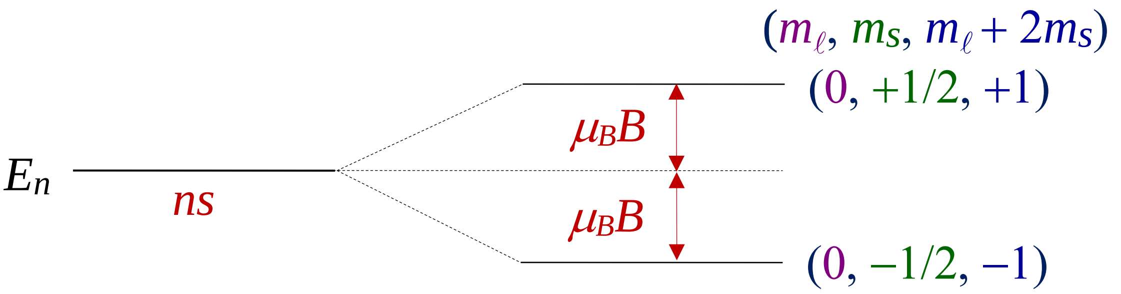
ตัวอย่าง : "*ns*"– state $\rightarrow \ell = 0 \rightarrow m_\ell = 0$ (ค่าเดียว)

$\rightarrow s = \frac{1}{2} \rightarrow m_s = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ ("2" ค่า)

m_ℓ	m_s	$m_\ell + 2m_s$
0	+1/2	+1
	–1/2	–1

$\rightarrow$ จะมี "การแยก" ของ "ระดับพลังงานของ *ns*– state" ออกเป็น "2 ระดับพลังงานย่อย"

{ตาม "จำนวนค่าที่เป็นไปได้" ของ "$m_\ell + 2m_s$"}



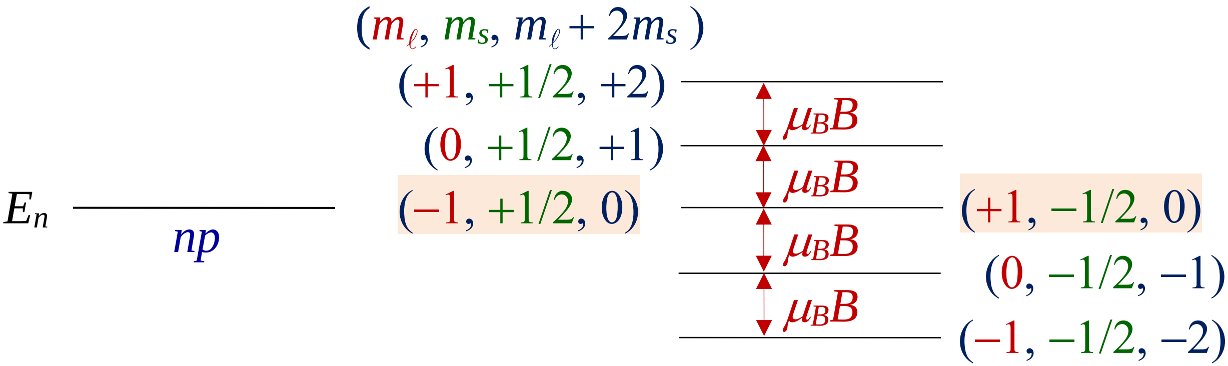
ตัวอย่าง : "*np*"– state $\rightarrow \ell = 1 \rightarrow m_\ell = -1,\ 0, +1$ ("3" ค่า)

$\rightarrow s = \frac{1}{2} \rightarrow m_s = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ ("2" ค่า)

m_s	m_ℓ	$m_\ell + 2m_s$
$+\frac{1}{2}$	+1	+2
	0	+1
	–1	0

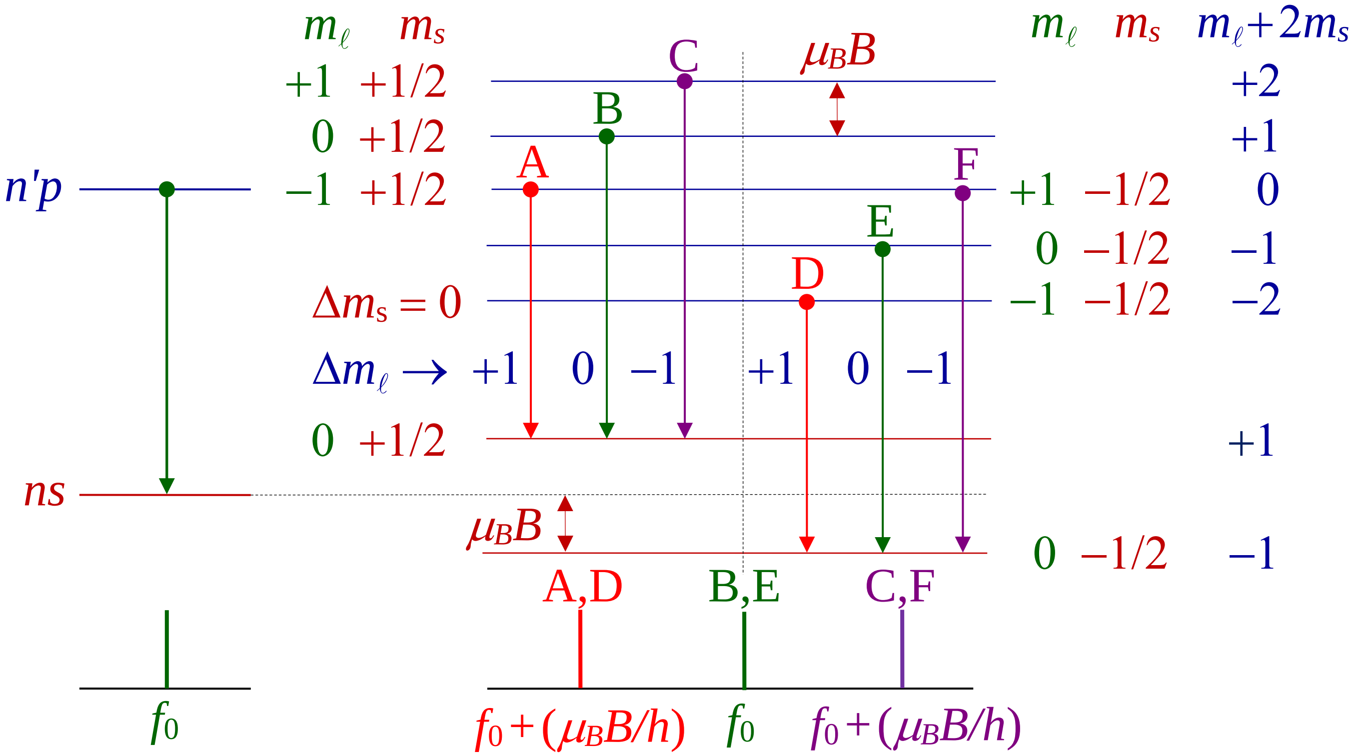
m_s	m_ℓ	$m_\ell + 2m_s$
$-\frac{1}{2}$	+1	0
	0	–1
	–1	–2

$\rightarrow$ จะมี "การแยก" ของ "ระดับพลังงานของ *np*– state" ออกเป็น "5 ระดับพลังงานย่อย"



ตัวอย่าง : "การแยก" ของ "spectrum lines" ของ "$n'p \to ns$" transitions

"selection rules" $\to$ (1) $\Delta\ell = \pm 1$, (2) $\Delta m_\ell = 0, \pm 1$ และ (3) $\Delta m_s = 0$



ใน “ตอนแรก” ที่มีการศึกษาเรื่อง “Zeeman effect” เรา “ไม่รู้ว่า electron มี spin”

ดังนั้น $$\Delta E_B = m_\ell \mu_B B$$

→ มี “การแยก” ของ “ระดับพลังงาน” ออกเป็น “$(2\ell + 1)$ ระดับพลังงานย่อย”

(ตาม “จำนวนค่าที่เป็นไปได้” ของ “m_ℓ”)

โดยที่ “ระยะแยก” จะมี “ขนาดเท่ากัน” สำหรับ “ทุกระดับพลังงาน”

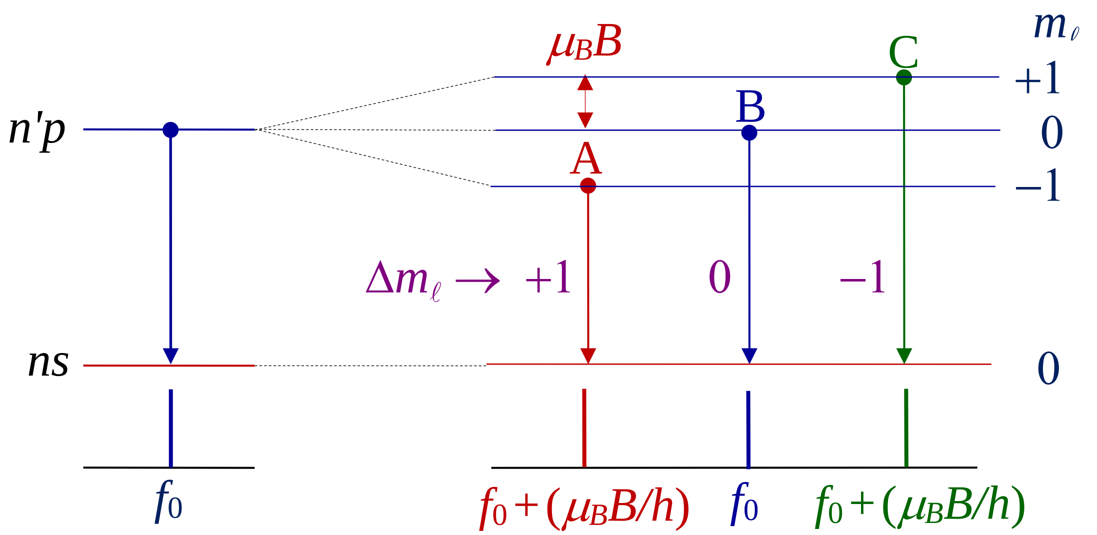
“ns”– state → $\ell = 0$ → $m_\ell = 0$ → “ไม่มีการแยก” ของ “ระดับพลังงาน”

“$n'p$”– state → $\ell = 1$ → $m_\ell = -1,\ 0, +1$

→ มี “การแยก” ของ “ระดับพลังงาน” ออกเป็น “3 ระดับพลังงานย่อย”

→ “คาดว่า” ควรจะเห็น “แต่ละ spectrum line” แยกออกเป็น “3 เส้น”

{โดยใช้ “selection rule”: $\Delta m_\ell = 0, \pm 1$ }



ใน "การทดลองจริง" (ซึ่งใช้ "weak magnetic field" → ต้องคำนึงถึง "fine structure") พบว่า

"แต่ละ spectrum line" แยกออก "มากกว่า 3 เส้น"

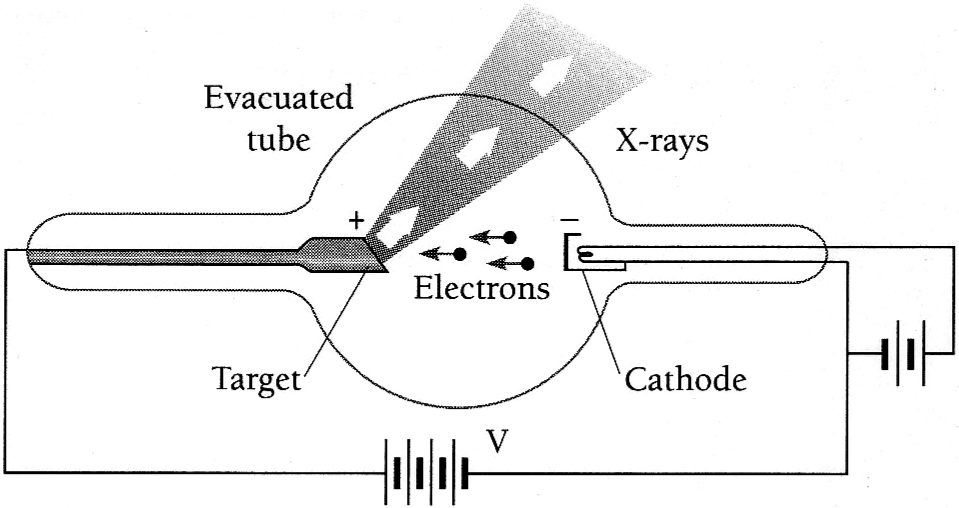
จึงเรียกว่า "Anomalous" Zeeman effect (เนื่องจาก "ไม่ตรงกับที่คาดว่าจะเป็น")

("anomalous" = "ผิดปกติ")

(6) รังสีเอ็กซ์ (X-ray)

Electromagnetic Waves ที่มี “$0.001 \text{ nm} \leq \lambda \leq 1 \text{ nm}$”

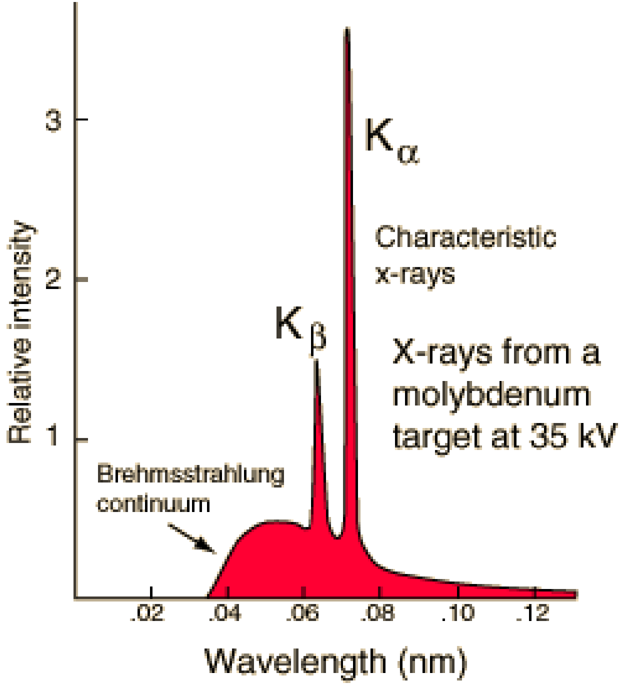
พบในปี 1895 โดย “Wilhelm Roentgen”



เครื่องมือที่ใช้ในการผลิตรังสีเอ็กซ์

X-Ray Spectrum จะประกอบด้วย

Continuous X-Ray Spectrum และ Characteristic X-Ray Spectrum



http://hydrogen.physik.uni-wuppertal.de/hyperphysics/hyperphysics/hbase/quantum/imgqua/xraych.gif

“Continuous Spectrum”

เกิดจากการที่ “electron” ซึ่งถูกเร่งด้วย “ความต่างศักย์ V” จนมีความเร็วสูง “ถูกหน่วง” หรือ “ทำให้หยุด” (เนื่องจากการชนกับเป้า)

“พลังงานจลน์” ของ “electron” เปลี่ยนเป็น “พลังงาน” ของ “photon”

เรียกกระบวนการนี้ว่า “Bremsstrahlung (= Braking Radiation)”

ค่า λ_{min} ซึ่ง “ไม่ขึ้นกับชนิดของเป้า”

หาได้จาก เงื่อนไขที่ “พลังงานจลน์ทั้งหมด” ของ “electron” (ซึ่งเท่ากับ eV)

เปลี่ยนเป็น “พลังงาน” ของ “photon” (hf_{max})

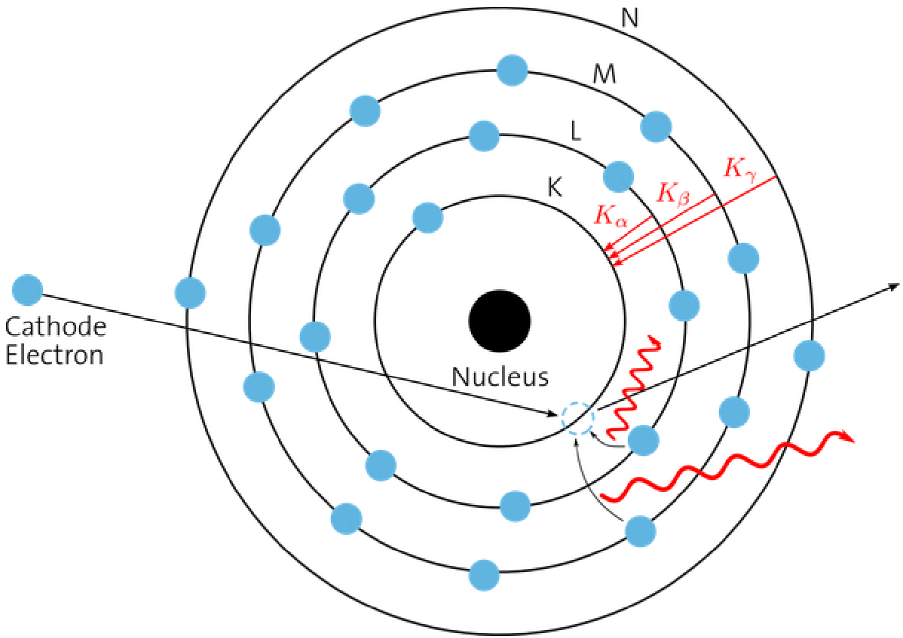
$$K_{electron} = eV = hf_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}}$$

“Characteristic Spectrum”

เกิดจากการที่ “electron (จากภายนอก) ที่มีพลังงานสูง” ชนกับ “อะตอมของเป้า”
แล้วทำให้ “electron (ของอะตอม) ที่อยู่ชั้นใน” หลุดออกไป
เกิดเป็น “ช่องว่าง” ขึ้น
เมื่อ “electron (ของอะตอม) ที่อยู่ในระดับพลังงานสูง” เปลี่ยนไปอยู่ใน “ช่องว่าง”
จะ “ปล่อย/คายพลังงาน” ออกมาในรูปของ “photon”

ถ้า “electron (ของอะตอม) ที่อยู่ชั้นใน” ที่หลุดออกไป คือ “K electron ($n = 1$)”
จะได้ “K-Series”

ถ้า “electron (ของอะตอม) ที่อยู่ชั้นใน” ที่หลุดออกไป คือ “L electron ($n = 2$)”
จะได้ “L-Series”



https://qph.ec.quoracdn.net/main-qimg-19bc3d59d5d8603e6340c500f99e261e

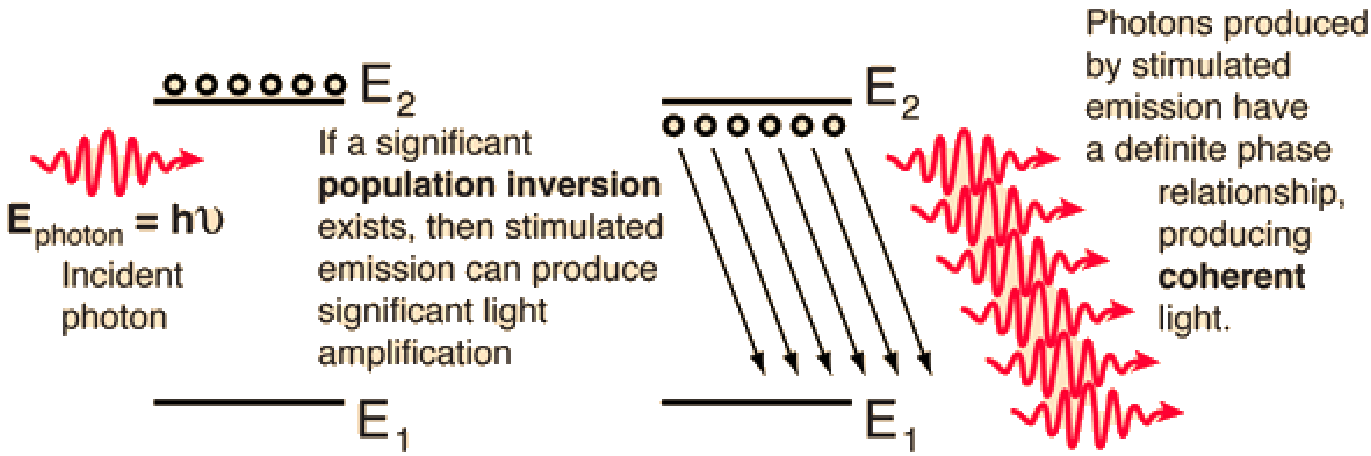
(7) เลเซอร์ (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation)

ให้ “แสง” ที่ (i) มี “ความเข้มสูง”, (ii) มี “ความยาวคลื่น (หรือ ความถี่) เดียว” และ (iii) เป็น “แสงอาพันธ์ (coherent → มีความต่างเฟสคงที่)”

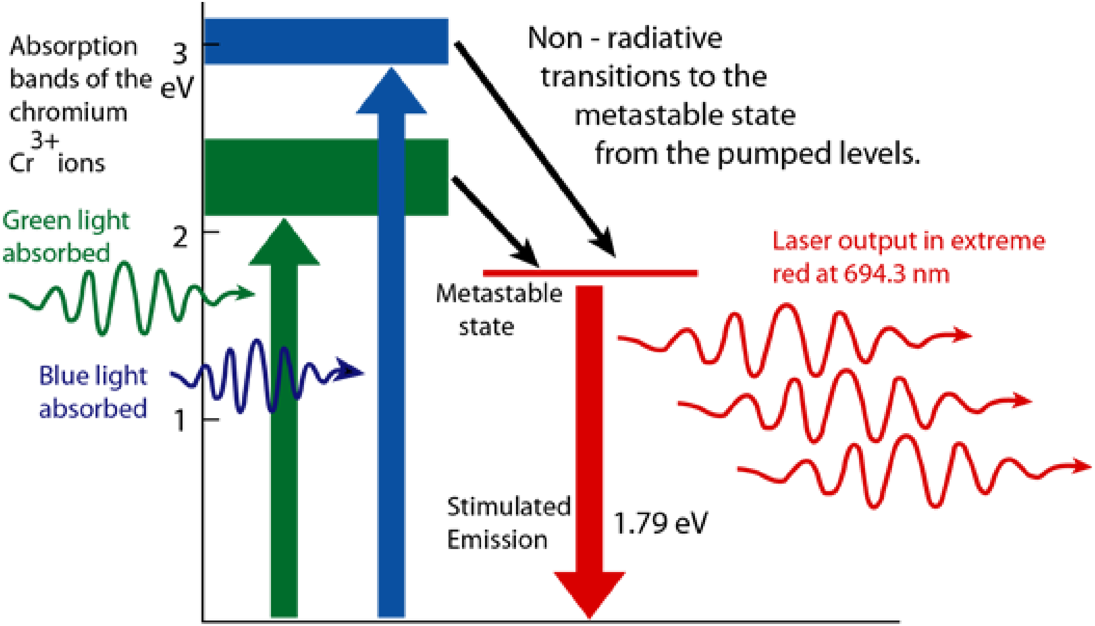
“หลักการ” ในการทำ “LASER”:

(i) “Population Inversion”: ดำเนินการเพื่อให้ “จำนวน atoms ที่มี electron อยู่ใน excited state” มีมากกว่า “จำนวน atoms ที่มี electron อยู่ใน ground state” โดยการ “ให้พลังงาน” เพื่อ “กระตุ้น” ให้ electron “เปลี่ยนระดับพลังงาน” จาก “ground state” ไปอยู่ใน “excited state” (เรียกกระบวนการนี้ว่า “Pumping”) (ในสภาวะปกติ “จำนวน atoms ที่มี electron อยู่ใน excited state” จะน้อยกว่า “จำนวน atoms ที่มี electron อยู่ใน ground state”)

(ii) “Stimulated Emission”: “กระตุ้น” ให้ “electrons” ซึ่งอยู่ใน “excited state” “เปลี่ยนระดับพลังงาน” กลับมาอยู่ใน ground state พร้อมๆ กัน



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/imgmod/qpro3.gif



Pumping Levels for Ruby Laser : $(Al_2O_3 : Cr^{3+})$

http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/optmod/imgopm/ruby2.png

แบบฝึกหัด “ฟิสิกส์อะตอม”

1. สำหรับอิเล็กตรอนในระดับพลังงาน $n = 4$ จงเขียนเลขควอนตัม ℓ, m_ℓ, m_s ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

$$n = 4 \rightarrow \begin{cases} \ell = 0 & \rightarrow & m_\ell = 0 \\ \ell = 1 & \rightarrow & m_\ell = 0 - 1, 0, 1 \\ \ell = 2 & \rightarrow & m_\ell = -2, -1, 0, 1, 2 \\ \ell = 3 & \rightarrow & m_\ell = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

2. สำหรับอิเล็กตรอนที่อยู่ใน quantum state $\ell = 2$ จงตอบคำถามต่อไปนี้

(ก) ขนาดของโมเมนตัมเชิงมุมพร้อมหน่วย [$\sqrt{6}\,\hbar$]

(ข) ค่าของ L_z ทั้งหมด [$-2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar$]

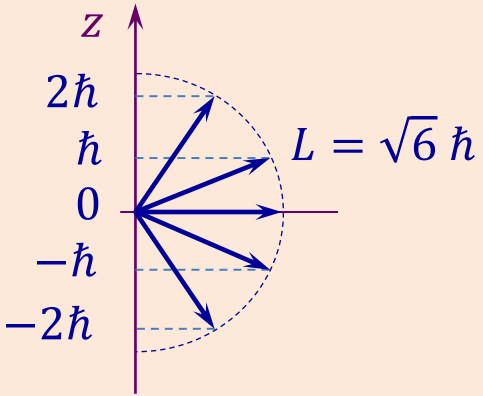
(ค) วาดรูปแสดงทิศทางของ $\vec{\boldsymbol{L}}$ ที่เป็นไปได้เทียบกับแกน z

$$\ell = 2 \;\rightarrow\; m_\ell = -2, -1, 0, 1, 2$$

(ก) $$L = \left|\vec{\boldsymbol{L}}\right| = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar \;\rightarrow\; \sqrt{2(2+1)}\,\hbar = \sqrt{6}\,\hbar \;\; \text{J·s}$$

(ข) $$L_z = -2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar$$

(ค)



3. อิเล็กตรอนตัวหนึ่งอยู่ในชั้น $n = 3$ จงขนาดที่โตที่สุดของโมเมนตัมเชิงมุมของอิเล็กตรอนตัวนี้ในแนวแกน z [$3\hbar$]

$$n = 3 \;\rightarrow\; \ell_{max} = 2 \;\rightarrow\; |m_\ell|_{max} = 2 \;\rightarrow\; |L_z|_{max} = 2\hbar$$

4. ฟังก์ชันคลื่น<u>ส่วนรัศมี</u>ของอิเล็กตรอนที่สถานะ $2p$ ในอะตอมไฮโดรเจน เขียนได้เป็น

$$R_{2p}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}(2a_0)^{3/2}}\frac{r}{a_0}\,e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

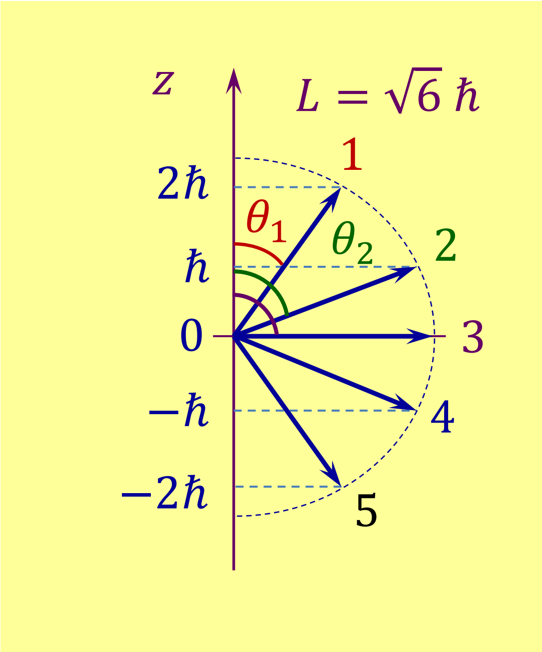
โอกาสมากที่สุดที่จะพบอิเล็กตรอนตัวนี้อยู่ห่างจากนิวเคลียสของไฮโดรเจนเป็นระยะทางเท่าใด [$4a_0$]

$$R_{2p}(r) = A\,re^{-r/2a_0} \;\rightarrow\; P_{2p}(r) = r^2\left|R_{2p}(r)\right|^2 = A^2r^4e^{-r/a_0}$$

$$\frac{dP_{2p}}{dr} = A^2\left\{(4r^3)e^{-r/a_0} + r^4\left(-\frac{e^{-r/a_0}}{a_0}\right)\right\} = 0 \;\rightarrow\; r = 4a_0$$

5. ขนาดของมุมที่เป็นไปได้ที่เวกเตอร์โมเมนตัมเชิงมุมกระทำกับทิศทางของสนามแม่เหล็ก $\vec{\boldsymbol{B}}$ คือค่าใดบ้าง เมื่อกำหนดให้ orbital angular number $\ell = 2$

$$\left[90°, \cos^{-1}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \cos^{-1}\left(\pm\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right]$$



$$\cos\theta_1 = \frac{2\hbar}{\sqrt{6}\,\hbar} = \frac{2}{\sqrt{6}} \;\rightarrow\; \theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\hbar}{\sqrt{6}\,\hbar} = \frac{1}{\sqrt{6}} \;\rightarrow\; \theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\cos\theta_3 = \frac{0}{\sqrt{6}\,\hbar} = 0 \;\rightarrow\; \theta_3 = 90°$$

$$\cos\theta_4 = \cos(\pi - \theta_2) = -\cos\theta_2$$

$$\rightarrow\; \theta_4 = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\cos\theta_5 = -\cos\theta_1 \;\rightarrow\; \theta_1 = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

6. [F2553] พิจารณาอิเล็กตรอนในอะตอมไฮโดรเจนที่มีฟังก์ชันคลื่น

$$\psi_{n\ell m_\ell} = \frac{1}{81\sqrt{3\pi}\, a_0^{3/2}}\left(27 - 18\,\frac{r}{a_0} + 2\,\frac{r^2}{a_0^2}\right)e^{-r/3a_0}$$

(a_0 คือค่าคงตัวที่เรียกว่า รัศมีของโบร์, r คือระยะห่างที่วัดจากนิวเคลียส)

กำหนดให้สนามแม่เหล็กภายนอกมีขนาด B และชี้ในทิศ $+z$

(ก) เมื่อพิจารณาจากฟังก์ชันคลื่นเท่านั้นโดยไม่ใช้ข้อมูลอื่นๆ นักศึกษาคิดว่าอิเล็กตรอนที่มีฟังก์ชันคลื่นนี้ จะอยู่ในชั้น $4p$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด ถ้าไม่ได้อิเล็กตรอนที่มีฟังก์ชันคลื่นนี้ควรอยู่ในชั้นใด ให้เหตุผลประกอบคำตอบของนักศึกษาด้วย

(ข) ถ้าให้ข้อมูลเพิ่มเติมว่า อะตอมไฮโดรเจนนี้มีพลังงาน $-1.5\ \mathrm{eV}$ ขณะที่ยังไม่อยู่ในสนามแม่เหล็ก ข้อมูลนี้บอกถึงเลขควอนตัมตัวใด และมีค่าเท่าใด

(ค) จากข้อมูลในข้อ (ก) และ (ข) ขนาดโมเมนตัมเชิงมุมของอิเล็กตรอน $\left|\vec{\boldsymbol{L}}_{orb}\right|$ เป็นเท่าไร

เนื่องจาก $R_{n\ell}(r) \propto$ (power series ที่มีกำลังสูงสุด r^{n-1})e^{-r/na_0}

โดย "จำนวนเทอม" ใน "power series" จะเท่ากับ "$n-\ell$"

$\ell = n-1 \rightarrow$ จะมี 1 เทอม $\rightarrow r^{n-1} \rightarrow R_{n,n-1}(r) \propto (r^{n-1})e^{-r/na_0}$

$\ell = n-2 \rightarrow$ จะมี 2 เทอม $\rightarrow R_{n,n-2}(r) \propto (Ar^{n-2} + Br^{n-1})e^{-r/na_0}$

$\ell = 0 \rightarrow$ จะมี n เทอม $\rightarrow R_{n0}(r) \propto (C_0 + C_1 r + \cdots + C_{n-1}r^{n-1})e^{-r/na_0}$

(ก) ส่วนที่เป็น power series มีกำลังสูงสุด $= 2 \rightarrow n$ ควรมีค่าเป็น 3

ส่วนที่เป็น exponential function คือ $e^{-r/3a_0} \rightarrow n$ ควรมีค่าเป็น 3

จำนวนเทอมใน power series $= 3 \rightarrow \ell$ ควรมีค่าเป็น 0

$\rightarrow$ อิเล็กตรอนที่มีฟังก์ชันคลื่นนี้ควรอยู่ในชั้นย่อย "$3s$"

(ข) บอกค่า n : $E_n = -\dfrac{13.6}{n^2}\,eV = -1.5\,eV \rightarrow n = \sqrt{\dfrac{13.6}{1.5}} = 3$

(ค) $\ell = 0 \rightarrow L = \left|\vec{\boldsymbol{L}}_{orb}\right| = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar = 0$

7. จากปรากฏการณ์ Zeeman จงเขียนแผนภาพแสดงการเกิด splitting ภายใต้อิทธิพลของสนามแม่เหล็ก และการเปลี่ยนระดับพลังงานที่เป็นไปได้ของอิเล็กตรอนจากชั้น f มายัง d โดยเลือกใช้ตัวแปรที่เหมาะสมประกอบคำอธิบาย

ถ้าไม่คิด "spin" ของ "electron"

จะมี "การแยกของระดับพลังงาน" ตามค่าของ "m_ℓ"

$$E_n \rightarrow E_n + m_\ell \mu_B B$$

ชั้นย่อย f $\rightarrow \ell = 3 \rightarrow m_\ell = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \rightarrow$ แยกออกเป็น 7 levels

ชั้นย่อย d $\rightarrow \ell = 2 \rightarrow m_\ell = -2, -1, 0, 1, 2 \rightarrow$ แยกออกเป็น 5 levels

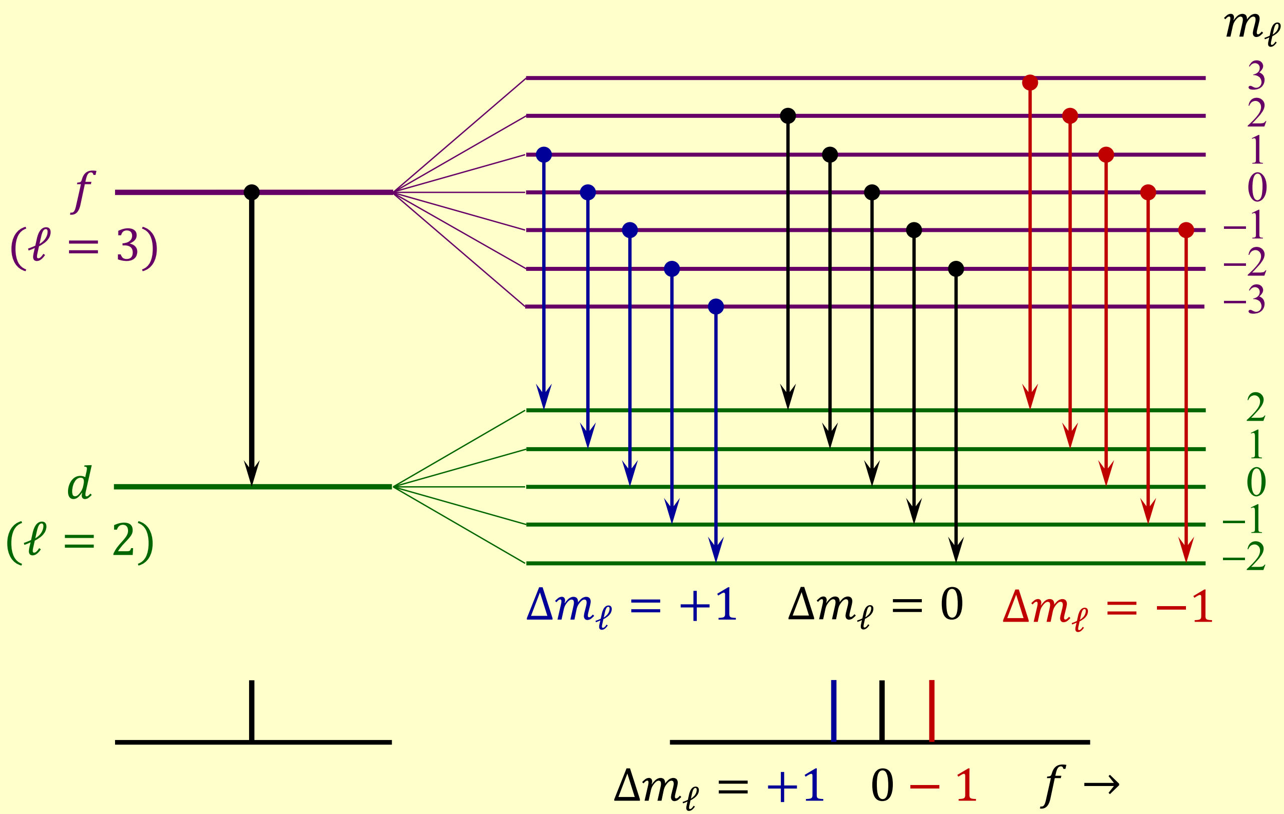
"selection rules" สำหรับการเปลี่ยนระดับพลังงาน คือ $\Delta m_\ell = 0, \pm 1$

"แต่ละ spectrum line" จะ "แยกออกเป็น 3 เส้น"

"ระยะระหว่างเส้นที่อยู่ติดกัน" $= \mu_B B$

$\downarrow$

"normal" Zeeman effect


m_ℓ
3
2
1
0
−1
−2
−3
f
$(\ell = 3)$
d
$(\ell = 2)$
2
1
0
−1
−2
$\Delta m_\ell = +1$
$\Delta m_\ell = 0$
$\Delta m_\ell = -1$
$\Delta m_\ell = +1 \quad 0 \quad -1 \qquad f \rightarrow$

8. จากการศึกษาปรากฏการณ์ Zeeman พบว่าสเปกตรัมเส้นหนึ่งความยาวคลื่น λ ในอนุกรมหนึ่งของอะตอมไฮโดรเจน เกิดการแยกออกเป็น 3 เส้น ภายใต้สนามแม่เหล็ก $\vec{\boldsymbol{B}}$ โดยความแตกต่างระหว่างความยาวคลื่นของสเปกตรัมที่อยู่ติดกันคือ $\Delta\lambda$ จงหาค่าสนามแม่เหล็ก $\vec{\boldsymbol{B}}$ ดังกล่าวในเทอมของ $\Delta\lambda, \lambda$ และตัวแปรอื่นที่เหมาะสม

$$\left[\frac{4\pi mc}{e}\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}\right]$$

แยกออกเป็น 3 เส้น → "normal" Zeeman effect

"spectrum lines ที่อยู่ติดกัน" จะมี "พลังงานต่างกัน" เท่ากับ $\Delta E = \mu_B B$

หรือมี "ความถี่ต่างกัน" $\Delta f = \dfrac{\Delta E}{h} = \dfrac{\mu_B B}{h}$

จาก $f = \dfrac{c}{\lambda}$ จะได้ $\Delta f = -c\left(\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda^2}\right) \rightarrow |\Delta f| = \dfrac{c|\Delta\lambda|}{\lambda^2} \rightarrow \dfrac{\mu_B B}{h} = \dfrac{c|\Delta\lambda|}{\lambda^2}$

$$B = \frac{ch}{\mu_B}\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda^2} = ch\left(\frac{2m}{e\hbar}\right)\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda^2} = \left(\frac{4\pi mc}{e}\right)\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda^2}$$

9. ถ้าเป้าทังสเตนในหลอดรังสีเอ็กซ์ถูกยิงด้วยอิเล็กตรอน ซึ่งถูกเร่งจากหยุดนิ่งด้วยความต่างศักย์ 40 kV จงหาความยาวคลื่นที่น้อยที่สุดของ bremsstrahlung radiation ที่เกิดขึ้น [0.310 Å]

$$K_{electron} = eV = hf_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}} \rightarrow \lambda_{min} = \frac{hc}{eV}$$

$$\lambda_{min} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s})(3 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s})}{(1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(40 \times 10^{3}\ \mathrm{V})} = 0.311\ \text{Å}$$

10. เลเซอร์ชนิดหนึ่งให้แสงที่มีความยาวคลื่น λ โดยมีกำลังของแสงเท่ากับ P จงหาว่าในขณะที่เลเซอร์กำลังทำงาน จะมีโฟตอนถูกปล่อยออกมาเป็นจำนวนกี่ตัวในแต่ละวินาที [$P\lambda/hc$]

$$\text{จำนวน photon ในเวลา 1 วินาที} = \frac{\text{พลังงานในเวลา 1 วินาที}}{\text{พลังงานของ photon 1 ตัว}} = \frac{P}{hf} = \frac{P}{h}\frac{\lambda}{c}$$

11. [F2548] ฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอนที่ชั้น $2s$ ในอะตอมไฮโดรเจนเขียนได้เป็น

$$\psi_{200}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0}$$

เมื่อ a_0 คือ Bohr radius

(ก) จงแสดงว่า radial probability density $P(r)$ ของอิเล็กตรอนนี้ คือ

$$P(r) = \frac{1}{8a_0^3}\left(4r^2 - 4\frac{r^3}{a_0} + \frac{r^4}{a_0^2}\right) e^{-r/a_0}$$

เนื่องจาก $P_{n\ell}(r) = r^2|R_{n\ell}(r)|^2 \rightarrow P_{20}(r) = r^2|R_{20}(r)|^2 \rightarrow$ ต้องหา $R_{20}(r)$

จาก $\psi_{200}(r) = R_{20}(r)Y_{00}(\theta,\phi) = \dfrac{R_{20}(r)}{\sqrt{4\pi}} = \dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}\, a_0^{3/2}}\left(2 - \dfrac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0}$

จะได้ $$R_{20}(r) = \frac{\sqrt{2}}{4a_0^{3/2}}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0}$$

(ข) ความน่าจะเป็นที่จะพบอิเล็กตรอนเท่ากับศูนย์ อยู่ที่รัศมีเท่าใดบ้าง

$$P_{20}(r) = r^2|R_{20}(r)|^2 = \frac{r^2}{8a_0^3}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0}$$

$$\downarrow$$

$P_{20}(r) = 0$ ที่ $(i)\ r = 0, (ii)\ r = 2a_0$ และ $(iii)\ r = \infty$

(ค) ถ้าต้องการหาว่า ความน่าจะเป็นมากที่สุดที่จะพบอิเล็กตรอนอยู่ที่รัศมีเท่าใดนั้น นักศึกษาจะมีวิธีการทำอย่างไร จงอธิบายให้ชัดเจน แต่ไม่ต้องคำนวณหาค่ารัศมีนั้นออกมา

แก้สมการ $\dfrac{dP(r)}{dr} = 0$ หาค่า r ที่ทำให้สมการเป็นจริง เขียนเป็น r_0

หา $\left[\dfrac{d^2P}{dr^2}\right]_{r=r_0}$ ถ้าเป็น "ลบ" $r = r_0$ จะเป็น ตำแหน่งที่มีโอกาสพบ electron มากที่สุด

$$P_{20}(r) = \frac{r^2}{8a_0^3}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0} = \frac{r^2}{A}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0}$$

$$\frac{dP_{20}}{dr} = \frac{2r}{A}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0} + \frac{r^2}{A}\left(-\frac{2}{a_0}\right)\left(2-\frac{r}{a_0}\right)e^{-r/a_0} + \frac{r^2}{A}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)^2\left(-\frac{1}{a_0}\right)e^{-r/a_0} = 0$$

$$2r\left(2-\frac{r}{a_0}\right)^2 - r^2\left(\frac{2}{a_0}\right)\left(2-\frac{r}{a_0}\right) - r^2\left(2-\frac{r}{a_0}\right)^2\left(\frac{1}{a_0}\right) = 0$$

$$r\left(2-\frac{r}{a_0}\right)\left\{2\left(2-\frac{r}{a_0}\right) - 2\left(\frac{r}{a_0}\right) - \left(2-\frac{r}{a_0}\right)\left(\frac{r}{a_0}\right)\right\} = 0$$

$$r\left(2-\frac{r}{a_0}\right)\left\{4 - 2\left(\frac{r}{a_0}\right) - 2\left(\frac{r}{a_0}\right) - 2\left(\frac{r}{a_0}\right) + \left(\frac{r}{a_0}\right)^2\right\} = 0$$

$$r\left(2-\frac{r}{a_0}\right)\left\{4-6\left(\frac{r}{a_0}\right)+\left(\frac{r}{a_0}\right)^2\right\}=0$$

ตำแหน่งที่ $P_{20}(r)$ จะมีค่า extremum (ซึ่งอาจเป็น minimum หรือ maximum) คือ

$r=0, r=2a_0$ และ ที่ตำแหน่งที่หาได้จากการแก้สมการ

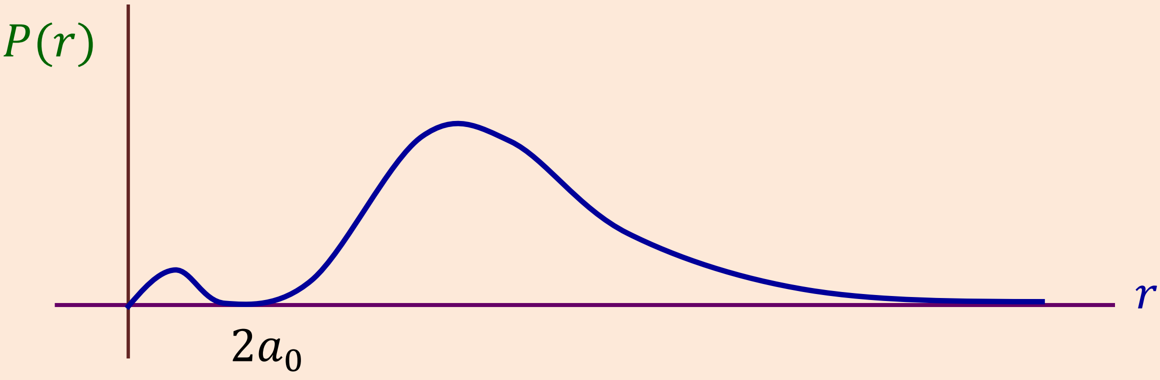
$$4-6\left(\frac{r}{a_0}\right)+\left(\frac{r}{a_0}\right)^2=0 \;\rightarrow\; \left(\frac{r}{a_0}\right)^2-6\left(\frac{r}{a_0}\right)-4=0$$

ซึ่งเป็น “สมการกำลังสอง (Quadratic Equation)” → มี “คำตอบ” คือ

$$\left(\frac{r}{a_0}\right)=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(1)(4)}}{2(1)}=\frac{6\pm\sqrt{20}}{2}=3\pm\sqrt{5}=3\pm 2.236$$

$$\left(\frac{r}{a_0}\right)=0.764 \text{ และ } 5.236 \;\rightarrow\; r=0.764\,a_0 \text{ และ } r=5.236\,a_0$$

(ง) จงเขียนกราฟแบบคร่าวๆ ระหว่าง $P(r)$ กับ r



(จ) จงเขียนอินทิกรัลที่แสดงถึงความน่าจะเป็นที่จะพบอิเล็กตรอนในช่วง $r = a_0$ ถึง $r = 2a_0$ (โดยไม่ต้องอินทิเกรตออกมา)

$$\int_{r=a_0}^{2a_0} P(r)dr$$

12. [F2552]

(ก) พิจารณาอิเล็กตรอนของอะตอมไฮโดรเจนที่เดิมอยู่ในชั้น $5d$ อิเล็กตรอนจะเปลี่ยนไปอยู่ในชั้น $1s$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

$5d \rightarrow \ell = 2$ และ $1s \rightarrow \ell = 0$ ดังนั้น $\Delta\ell = -2$

ซึ่ง “ขัด” กับ “selection rule” $\Delta\ell = \pm 1$ $\rightarrow$ “เปลี่ยน” ระดับพลังงาน “ไม่ได้”

(ข) พิจารณาการเปลี่ยนระดับพลังงานของอิเล็กตรอนในอะตอมไฮโดรเจน จากชั้น $5f$ มายังชั้น $4d$ ถ้าอะตอมไฮโดรเจนอยู่ภายใต้สนามแม่เหล็กขนาด B จะพบว่า มีทรานสิชันได้หลายเส้น และหลายความถี่ จงเขียนแผนภาพแสดงระดับชั้นพลังงานและจงลากเส้นทรานสิชันทุกเส้นที่เป็นไปได้ที่ให้ความถี่สูงสุด (ลากเส้นเฉพาะทรานสิชันที่ให้ความถี่สูงที่สุดเท่านั้น ห้ามลากทรานสิชันที่ให้ความถี่ค่าอื่น)

ดูข้อ 7

(ค) ถ้าเส้นสเปกตรัมที่ความถี่ที่น้อยที่สุดของแสงที่เกิดจากการเปลี่ยนชั้นพลังงานในข้อ (ข) อยู่ในย่านอินฟราเรด ความถี่ที่มากที่สุดจะอยู่ย่านใด

ความยาวคลื่น (λ) $\rightarrow$

อัลตราไวโอเลต ม่วง คราม น้ำเงิน เขียว เหลือง แสด แดง อินฟราเรด

$\leftarrow$ ความถี่ (f)

(ง) ปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในข้อ (ข) มีชื่อเรียกว่าอะไร

"Normal" Zeeman effect

(จ) ถ้าเส้นสเปกตรัมในข้อ (ข) แต่ละเส้นแยกออกเป็นสองเส้นย่อย จะเรียกชื่อปรากฏการณ์นี้ว่าอะไร

"Anomalous" Zeeman effect

13. [F2552] พิจารณาอิเล็กตรอนในอะตอมไฮโดรเจนที่มีฟังก์ชันคลื่น

$$\psi_{n\ell m_\ell} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}\, a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} (\sin\theta)\left(e^{-i\phi}\right) e^{-r/2a_0}$$

เมื่อ a_0 คือค่าคงตัวที่เรียกว่า รัศมีของโบร์, r คือระยะห่างที่วัดจากนิวเคลียส กำหนดให้สนามแม่เหล็กภายนอกมีขนาด B และชี้ในทิศ $+z$

(ก) เมื่อพิจารณาจากฟังก์ชันคลื่น นักศึกษาคิดว่า ตัวเลขห้อยของฟังก์ชันคลื่นนี้จะเป็น 300 ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

ส่วนที่เป็น exponential function ของ r คือ $e^{-r/2a_0}$ $\rightarrow$ n ควรมีค่าเป็น 2

ส่วนที่เป็น power series มีกำลังสูงสุด $= 1$ $\rightarrow$ n ควรมีค่าเป็น 2

จำนวนเทอมใน power series $= 1$ $\rightarrow$ ℓ ควรมีค่าเป็น 1 (ค่าสูงสุดที่เป็นได้)

ส่วนที่เป็น exponential function ของ ϕ คือ $e^{-i\phi}$ $\rightarrow$ m_ℓ ควรมีค่าเป็น -1

$\downarrow$

ตัวเลขห้อยของฟังก์ชันคลื่นนี้ควรจะเป็น $21-1$

(ข) ถ้าให้ข้อมูลเพิ่มเติมว่า อะตอมไฮโดรเจนนี้มีพลังงาน -3.4 eV ขณะที่ยังไม่อยู่ในสนามแม่เหล็ก ข้อมูลนี้บอกถึงเลขควอนตัมตัวใด และมีค่าเท่าใด

บอกค่า n : $E_n = -\dfrac{13.6}{n^2}\ \text{eV} = -3.4\ \text{eV} \ \rightarrow n = \sqrt{\dfrac{13.6}{3.4}} = 2$

(ค) ถ้าอะตอมไฮโดรเจนนี้อยู่ในสนามแม่เหล็กที่มีขนาด B และชี้ในทิศ $+z$ พบว่าอะตอมไฮโดรเจนนี้มีพลังงานน้อยกว่าในข้อ (ข) โดยผลต่างของพลังงานมีค่า $\mu_B B$ ข้อมูลนี้บอกถึงเลขควอนตัมตัวใด และมีค่าเท่าใด (ถ้าไม่คิด “spin”)

บอกค่า m_ℓ : พลังงาน “น้อยกว่า” เมื่อไม่มีสนามแม่เหล็ก $\mu_B B \rightarrow \ m_\ell = -1$

(ง) จากข้อมูลในข้อ (ข) และ (ค) ขนาดโมเมนตัมเชิงมุมของอิเล็กตรอน $|\vec{\boldsymbol{L}}_{orb}|$ เป็นเท่าไร

$$|\vec{\boldsymbol{L}}_{orb}| = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar = \sqrt{1(1+1)}\,\hbar = \sqrt{2}\,\hbar$$

(จ) จากข้อมูลในข้อ (ข) และ (ค) จงวาดรูปแสดงทิศทางของ $\vec{L}_{orb}$ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเทียบกับแกน $+z$